

NEDERL. AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN

PROCEEDINGS

VOLUME XLV

No. 7

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: M. W. WOERDEMAN

CONTENTS

VENING MEINESZ, F. A.: "The equilibrium figure of the Earth and the indirect isostatic or BOWIE reduction". (With one table), p. 611.

KREDIET, G.: "Sexreversal and chromosomes", p. 619.

SCHOUTEN, J. A. und W. VAN DER KULK: "Beiträge zur Theorie der Systeme PFAFFscher Gleichungen", p. 624.

VERKADE, P. E., C. P. VAN DIJK und Fr. W. MEERBURG: "Ueber neue Süssstoffe und neue Lokalanästhetika." (Vorläufige Mitteilung), p. 630.

KONING, L. P. G.: "On the determination of the faultplanes in the hypocentre of the deepfocus earthquake of June 29, 1934 in the Netherlands East Indies." (With one map.) (Communicated by Prof. J. D. VAN DER WAALS), p. 636.

GROOT, S. R. DE: "Sur l'intégration de quelques problèmes aux limites régis par l'équation de FOURIER dite „de la chaleur“ au moyen de la méthode des transformations fonctionnelles simultanées." (Communicated by Prof. J. D. VAN DER WAALS JR.), p. 643.

HARINGX, J. A.: "On the buckling and the lateral rigidity of helical compression springs." II. (Communicated by Prof. C. B. BIEZENO), p. 650.

GROOT, J. DE: "Bemerkung zum Problem der topologischen Erweiterung von Abbildungen." (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER), p. 655.

GROOT, J. DE und F. LOONSTRA: "Topologische Eigenschaften bewerteter Körper." (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER), p. 658.

LOONSTRA, F.: "Im Kleinen kompakte nichtarchimedisch bewertete Körper." (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER), p. 665.

BOS, W. J.: "Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im R_4 ." (Dreizehnte Mitteilung.) (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK), p. 669.

BREMEKAMP, H.: "Sur l'existence et la construction des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du quatrième ordre." (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 675.

MONNA, A. F.: "Sur quelques propriétés d'une classe de surfaces minima." (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 681.

MONNA, A. F.: "Sur une classe de fonctions sous-harmoniques et des triples de fonctions harmoniques conjuguées." (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE), p. 687.

GERRETSEN, J. C. H.: "Die Liniengeometrie des 4-dimensionalen Raumes." (Erste Mitteilung.) (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 690.

BUNGENBERG DE JONG, H. G. and C. H. RERING: "Some instances of tricomplex flocculation." I. "Soybean phosphatide + carraghene + crystalloid cation." (Communicated by Prof. H. R. KRUYT), p. 697.

BUNGENBERG DE JONG, H. G. and C. H. RERING: "Some instances of tricomplex flocculation." II. "The flocculation of egglecithin and carraghene sols with crystalloid cations." (Communicated by Prof. H. R. KRUYT), p. 705.

BUNGENBERG DE JONG, H. G. and C. H. RERING: "Some instances of tricomplex flocculation." III. "The flocculation of gelatine + carraghene with alkali and earth alkali cations." (Communicated by Prof. H. R. KRUYT), p. 713.

DERX, H. G.: "Exposé d'une méthode chronométrique pour le dosage de la peroxydase." (Communicated by Prof. L. G. M. BAAS BECKING), p. 718.

SCHUFFELEN, A. C. and R. LOOSJES: "The Importance of the Growth Medium for the Absorption of Cations by Plants (A Working Hypothesis)." (Communicated by Prof. A. H. BLAAUW), p. 726.

HOOGENRAAD, H. R. and A. A. DE GROOT: "On fossil Freshwater Rhizopoda from tropical Moors in Sumatra and Borneo." (With one plate.) (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 734.

AUËR, J.: "The role of the postcardinal vein in the development of the inferior vena cava." (Communicated by Prof. G. KREDIET), p. 742.

GAARENSTROOM, J. H., W. SCHRAFFORDT KOOPS and L. A. M. STOLTE: "Do hormonal interrelation exist between thyroid gland, uterus, gonads and hypophysis, in connection with the cyclic changes in the rat." (Communicated by Prof. J. VAN DER HOEVE), p. 750.

VONK, H. J.: "Das Vorkommen einer Gallensäure (Taurocholsäure) im Verdauungssaft des Flusskrebses (*Potamobius leptodactylus*) und ihre Bedeutung für die Fettresorption." (Communicated by Prof. H. J. JORDAN), p. 752.

POSTMA, N.: "Ueber den Tonus des Schneckenfusses (*Helix pomatia* L.)." IV. "Ueber tonische Reaktionen des seines Gangliensystems beraubten Fusses; Erzeugung des Tonus, adaptive Veränderungen des Tonusspiegels und des Tonusniveaus ("Netzkonstanz"). Vorläufige Mitteilung. (Communicated by Prof. H. J. JORDAN), p. 758.

VERSTEEGH, C. and C. DIJKSTRA: "Anatomical and experimental investigations about the muscular system of the mammalian lung." (Communicated by Prof. A. DE KLEYN), p. 766.

ONG SIAN GWAN: "Différenciation des protéines de poumon normal et de poumon intoxiqué par le phosgène au moyen de la réaction anaphylactique." (Communicated by Prof. E. GORTER), p. 774.

Geodesy. — *The equilibrium figure of the Earth and the indirect isostatic or BOWIE reduction.* By F. A. VENING MEINESZ.

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

It has already long ago been recognized that the presence of the topography and its isostatic compensation affects the shape of the geoid and that, therefore, we have to supply the normal isostatic reduction of gravity values with an additional correction, usually called the indirect isostatic or BOWIE reduction, for reducing the gravity values from the original geoid to the new geoid as obtained by the removal of the topography and the compensation. Assuming that the mass-layer between the two geoids is itself isostatically compensated and that, because of its thickness N_i being regular, the attraction by this layer is practically neutralized by this compensation, the indirect isostatic reduction has hitherto been limited to the free air reduction over the distance N_i . Basing themselves on this assumption W. D. LAMBERT and F. W. DARLING have made valuable investigations about this subject of which we may especially mention those contained in the "Bulletin Géodésique", No. 26 (1930) and in the "Special Publication" No. 199 of the U. S. Coast and Geodetic Survey¹⁾. Studying the matter in connection with the application of the indirect reduction to the gravity results obtained at sea, the writer came to new conclusions and this led him to an investigation which will shortly be published. In the present paper its main points will be given.

The principal points of this research have been

1. It appears to the writer that the N_i layer between the two geoids is not isostatically compensated and that in consequence of this the attraction by this layer has fully to be taken into account. It seems to him that the isostatic equilibrium of the topography must be realized with regard to the surfaces of equal pressure, i.e. that it is conditioned by the position of the actual geoid and that, therefore, the N_i layer can not be included in the matter which is isostatically compensated.
2. Deeper equipotential surfaces are likewise affected by the presence of the topography and the compensation and this brings about a change of the mass-distribution inside the Earth which also has an effect on the shape of the geoid.
3. The investigations of LAMBERT and DARLING only refer to the HAYFORD system of isostatic compensation. It was desirable likewise to derive formulas for the AIRY system as developed in the formulas and tables of HEISKANEN for the local isostatic reduction and of the writer for the regional reduction.
4. The zero and first order harmonic terms of the topographic elevation give rise to special problems which will have to be considered.

By determining the shift of the geoid brought about by the presence of the topography and the compensation as they are distributed over the Earth's surface we find at the same time the Figure of the Earth corresponding to equilibrium; adopting the ellipsoid

¹⁾ W. D. LAMBERT, An approximate rule for the distance between the geoid and the spheroid on the assumption of complete isostatic compensation of the topography, Bull. Géod. 26, p. 91.

W. D. LAMBERT, The form of the geoid on the hypothesis of complete isostatic compensation, Bull. Géod. 26, p. 98.

W. D. LAMBERT, The reduction of observed values of gravity to sea-level, Bull. Géod. 26, p. 107.

W. D. LAMBERT and F. W. DARLING, Tables for determining the form of the geoid and its indirect effect on gravity, Spec. Publ. C. G. a. S. No. 199.

of revolution as a good approximation of the equilibrium figure of an entirely fluid Earth, we obtain the equilibrium figure of a fluid Earth on which a rigid crust is floating in hydrostatic equilibrium by applying this shift to the ellipsoid. We shall leave aside the problem how the Earth's rotation must tend to change the distribution of the topography over the Earth.

In our investigation we shall neglect local features of the geoid of less than 400 km diameter which even for extreme topographic irregularities never exceed an amount of 0.1 m in N'_i ; this removes the need to make special investigations for the case of regional compensation. We shall further distinguish between the two current suppositions about the isostatic compensation: exact compensation in terms of mass or hydrostatic equilibrium of the crust floating on the substratum. The first only corresponds to equilibrium if we adopt the presence of a complicated and rather improbable system of stresses in cross-sections of the crust which is not likely to occur. We shall nevertheless deal with it because several systems of isostatic reduction tables are based on it.

Indicating the Earth's radius by R , the topographic elevation by h , the height of the compensation by h_c , the densities of both by θ_0 and $-\theta_c$ and the vertical distance of the centres of gravity of the topography and the compensation by l , we find for hydrostatic equilibrium

$$\theta_c h_c = \theta_0 h \quad \dots \quad (1A)$$

and for exact mass-compensation

$$\theta_c h_c = \theta_0 \frac{R^2}{(R-l)^2} h. \quad \dots \quad (1B)$$

The second formula corresponds to the equality of the masses per surface unit of the topography and the compensation; we shall denote these masses by m_0 and m_c . In this case the removal of both masses comes to the same as the transfer of the mass $m_0 = \theta_0 h$ over the distance l . Neglecting local deviations we may expect its effect on the geoid to be proportional to the mass m_0 and to the distance l i.e. to the product lh .

In formula (1A) we have neglected, as it is usually done, the variation of gravity with the depth. The removal of the topography and the compensation in this case of hydrostatic equilibrium corresponds not only to a transfer of the mass m_0 over the distance l but also to a decrease of mass which, in neglecting higher powers of the ratio lh/R , is given by

$$m_0 - m_c = \theta_0 h \left[1 - \frac{(R-l)^2}{R^2} \right] = 2 \theta_0 \frac{l h}{R}. \quad \dots \quad (2)$$

So this difference of mass is likewise proportional to the product lh . If we do not neglect the variation of gravity with the depth formula (2) has to be multiplied by a factor F given by

$$F = 2 - \frac{3}{2} \frac{\theta'_0}{\theta_m} \quad \dots \quad (3)$$

where θ'_0 is the mean value of the density over the depth l and θ_m the mean density of the Earth. Putting the ratio of these densities at 0.5 the factor F becomes 1.25.

In order to determine the shift of the geoid N'_i and the indirect isostatic reduction $\Delta'_2 g$ for the supposition of hydrostatic equilibrium we shall derive the effects N''_i and $\Delta''_2 g$ corresponding to the presence of the masses $m_0 - m_c$ and add these quantities to the shift N_i and the indirect reduction $\Delta_2 g$ found for the supposition of exact mass-compensation. For this purpose we shall use formula (2). In case we wish to take the variation of gravity into account we have to multiply the quantities N''_i and $\Delta''_2 g$ by (3).

We have seen that the effects on the geoid and on the gravity reduction for both suppositions of isostasy depend on the product lh and not on l or h separately. This

allows a simple extension of the formulas for HAYFORD's hypothesis about the distribution of the compensation to that of AIRY. For the first we may adopt l to be practically constant over the Earth's surface but this is no longer true for the second. Indicating the thickness of the Earth's crust by T we find in this case for land-areas

$$l = T + \frac{1}{2}(1 + 4.450)h = T + 2.725h \dots \dots \quad (4A)$$

and for sea-areas where h represents 0.615 times the depth with negative sign

$$l = T + \frac{1}{2}(1.626 + 4.450)h = T + 3.038h \dots \dots \quad (4B)$$

For avoiding complications we shall take the mean of both formulas for the whole Earth's surface. Combining them proportionally to the ratio of land and sea we obtain

$$l = T + 2.95h \dots \dots \dots \dots \quad (4)$$

When we shall presently derive the solution of our problem by developing into spherical harmonics, we can in a simple way take this variability of l into account by not developing h but the product $lh = Th + ah^2$ where we introduce $a = 2.95$. By afterwards putting $T = 56.85$ km and $a = 0$ we can likewise use the formulas thus obtained for the HAYFORD hypothesis.

For the first order harmonic term of the topographic elevation the distribution of the isostatic compensation differs from the two current suppositions hitherto considered. We find in fact that both these suppositions are in conflict with the position of the geoid as adjusted according to the well known result of potential theory that if choosing the origin of the coordinates in the centre of gravity of the Earth the first order term of the potential must be zero. As we shall presently see this leads to

$$\theta_c(h_c)_1 = \theta_0 \frac{R^3}{(R-l)^3} (h)_1 \dots \dots \dots \dots \quad (5)$$

where we suppose l to be constant over the Earth's surface. The index 1 indicates the first order harmonic of h and h_c . We thus obtain

$$(m_c)_1 = \frac{R}{R-l} (m_0)_1$$

or

$$(m_0 - m_c)_1 = -\theta_0 \frac{(lh)_1}{R} \dots \dots \dots \dots \quad (6)$$

which in this shape is also valid for l being variable. So for the first order harmonic of the topography we are compelled to assume an isostatic compensation according to (5) and (6) and these formulas differ from (1) and (2). This is a curious result which up to now has never been noticed; it shows that a considerable part of the topography is slightly otherwise compensated than the remainder.

Defining as we are at liberty to do and as it is obviously also indicated to do, that the centre of gravity of the Earth after removing the topography and the compensation is kept in coincidence with the origin of the coordinates or, which comes to the same, with its position before the change, we know that neither N_i nor $\Delta_2 g$ can contain first order harmonic terms. This involves the need to subtract the first order term of the normal isostatic reduction $\Delta_1 g$ which we shall denote by $(\Delta_1 g)_1$. For the supposition of exact mass-compensation $(\Delta_1 g)_1$ must correspond to the attraction by the mass-differences $(m_0 - m_c)_1$ which had erroneously been included in the reduction $\Delta_1 g$ and a nearer investigation shows that this is indeed true. Subtracting (2) from (6) we see that for the isostatic reduction according to hydrostatic equilibrium we have to remove three times as much and this is in harmony with the first order term of $\Delta'_1 g$ which in this case proves to be in the same ratio larger.

The zero order harmonic terms of N_i and $\Delta_2 g$ are unquestionably zero for the

supposition of exact mass-compensation according to which the total mass of the Earth is not changed by the removal of the topography and the compensation. For the hypothesis of hydrostatic equilibrium the question is more doubtful. Regarding the zero order terms of N'_i the writer proposes to follow the suggestion of LAMBERT to determine by definition that also in this case the zero order term is zero or, in other words, to define the geoid after removing the topography and the compensation by the condition that its volume remains the same. LAMBERT gives excellent arguments in favour of it¹⁾ which the writer fully endorses; he may here refer to LAMBERT's treatment of the question.

As a consequence of the definition which removes the zero order harmonic of N'_i the zero order term of $\Delta'_2 g$ must also be zero. In this connection we have, however, to consider another point. Because of the change of the total mass of the Earth accompanying the removal of the topography and the compensation according to the supposition of hydrostatic equilibrium, we have in this case to alter the formula of normal gravity by a corresponding amount. By applying (2) we find this correction $\delta\gamma_0$ to be

$$\delta\gamma_0 = 6 \frac{\theta_0}{\theta_m} \frac{g}{R^2} (lh)_0 \dots \dots \dots \quad (7)$$

It diminishes the gravity anomaly by the same amount.

For deriving the formulas for N_i and $\Delta_2 g$ we shall make use of a development in spherical harmonics. In the same way as LAMBERT has done for this purpose we shall assume the topography to be condensed in an infinitely thin surface layer on the geoid; we may do this because we shall neglect the local features of the geoid. Indicating the n th order terms by the index n we find for the outside potential at the distance r ($r \geq R$) brought about by this topography

$$(V_0)_n = 3 \frac{\theta_0}{\theta_m} g \times \frac{1}{2n+1} \frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} h_n \dots \dots \quad (8)$$

and for the potential caused by the compensation

$$(V_c)_n = -3 \frac{\theta_c}{\theta_m} g \times \frac{1}{2n+1} \frac{(R-l)^{n+2}}{R r^{n+1}} (h_c)_n \dots \dots \quad (9)$$

where we assumed l to be constant over the Earth's surface. Together we obtain

$$(V_i)_n = 3 \frac{1}{\theta_m} g \times \frac{1}{2n+1} \frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} \left[\theta_0 h_n - \theta_c \frac{(R-l)^{n+2}}{R^{n+2}} (h_c)_n \right]. \quad (10)$$

We see that in putting $n=1$ and equalling the potential of this term to zero we find indeed the relation given by formula (5).

By introducing formula (1B), by putting $r=R$ and by neglecting the higher powers of l/R we obtain for the potential on the geoid in case we suppose exact mass-compensation

$$(V_i)_n = 3 \frac{\theta_0}{\theta_m} \frac{g}{R} \times \frac{n}{2n+1} (lh)_n \dots \dots \quad (11)$$

By bringing l between the brackets of the quantity to be developed in spherical harmonics, this formula has been adapted to the case of l being variable over the Earth's surface.

Besides this main part of the potential on the geoid caused by the presence of the topography and the compensation, contributions are also brought about by the mass-layer N_i and by the changes of the mass-distribution inside the Earth corresponding

¹⁾ Bulletin Géodésique, No. 26, p. 159 e.s.

to the shifts of the inner equipotential surfaces. The N_i layer contributes an amount of which the n th harmonic term is

$$(V_N)_n = 3 \frac{\theta_0}{\theta_m} g \times \frac{1}{2n+1} (N_i)_n. \dots \dots \dots \quad (12)$$

As we have already remarked we do not suppose any isostatic compensation of this layer to be present and so we have to make no corresponding addition to this term.

We shall now deduce the contribution to the potential on the geoid brought about by the shift of the inside equipotential surfaces. For determining the potential V_1 caused by the topography and the compensation at the bottom of the crust where we assume a density discontinuity Δ_1 we may derive the difference of potential caused by a pair of parallel mass-layers of equal size but opposite sign and of infinite extent; in our case these layers are represented by the topography and the compensation. We find a difference of potential on both sides of these layers of

$$3 \frac{\theta_0}{\theta_m} g \frac{lh}{R}. \dots \dots \dots \dots \quad (13)$$

It is possible to prove that we can neglect all other effects on this difference; this corresponds a.o. to our neglecting the effects of all local topographic features with regard to which the thickness of the crust is not small. We thus find

$$V_1 = V_i - 3 \frac{\theta_0}{\theta_m} g \frac{lh}{R}. \dots \dots \dots \dots \quad (14)$$

This potential corresponds to a shift of the equipotential surface at the bottom of the crust of

$$N_1 = N_i - 3 \frac{\theta_0}{\theta_m} \frac{lh}{R} \dots \dots \dots \dots \quad (15)$$

and this brings about a mass-layer $N_1 \Delta_1$ which causes a potential on the geoid of which the n th harmonic is

$$(V_1)_n = 3 \frac{\Delta_1}{\theta_m} g \times \frac{1}{2n+1} (N_i)_n - 9 \frac{\theta_0 \Delta_1}{\theta_m^2} \frac{g}{R} \times \frac{1}{2n+1} (lh)_n. \dots \quad (16)$$

For deriving the effect of the changes in the mass-distribution at greater depth in the Earth, we have to make an assumption about the mass-distribution in the Earth but for simplifying the deductions we shall adopt an approximation. Besides the Δ_1 discontinuity at the bottom of the crust we shall only admit two further discontinuities Δ_2 and Δ_3 for radii ϱ_2 and ϱ_3 . For these quantities the writer has introduced the following figures.

$$\left. \begin{array}{l} \theta_0 = 2.67, \\ \Delta_1 = 0.60, \\ \Delta_2 = 2.23, \quad \varrho_2 = R - 800 \text{ km}, \\ \Delta_3 = 4.647, \quad \varrho_3 = R - 2900 \text{ km}. \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (17)$$

This leads to

$$\theta_m = 5.504^{\circ} \text{ 1).}$$

Denoting the shifts of these two equipotential surfaces by N_2 and N_3 , we have two

¹⁾ This value is in harmony with the values of NEWTON's constant of 6.67×10^{-8} , the mean radius of the international ellipsoid of 6371.2 km and the mean value of gravity according to Cassin's formula of 979.77.

mass-layers $N_2\Delta_2$ and $N_3\Delta_3$. The n th harmonic of the effect of these layers on the geoid is

$$(V_{23})_n = 3 \frac{\Delta_2}{\theta_m} g \times \frac{\varrho_2^{n+2}}{R^{n+2}} (N_2)_n + 3 \frac{\Delta_3}{\theta_m} g \times \frac{\varrho_3^{n+2}}{R^{n+2}} (N_3)_n. \quad (18)$$

The sum of (11), (12), (16) and (18) gives the n th harmonic term of the total change of the potential on the geoid caused by the presence of the topography and the compensation. This sum must, therefore, equal $g(N_i)_n$. We thus obtain a linear equation for each value of n in the unknown quantities $(N_i)_n$, $(N_2)_n$ and $(N_3)_n$. Two similar equations may be obtained for each value of n by deriving the total changes of potential at the discontinuity surfaces Δ_2 and Δ_3 and by equalling them to $g_2(N_2)_n$ resp. $g_3(N_3)_n$ where g_2 and g_3 indicate the values of gravity on these surfaces. By solving these equations we find the different harmonic terms of N_i , N_2 and N_3 .

It is easy to see that the solution for high values of n tends towards

$$\left. \begin{aligned} (N_i)_n &= \frac{3}{2} \frac{\theta_0}{\theta_m} \frac{1}{R} (lh)_n & (N_1)_n &= -\frac{3}{2} \frac{\theta_0}{\theta_m} \frac{1}{R} (lh)_n \\ (N_2)_n &= 0 & (N_3)_n &= 0 \end{aligned} \right\} . \quad (19)$$

If we omit the index n the formula for N_i corresponds to the approximate formula of LAMBERT given by him in 1930¹⁾; we shall denote its value by N_L . Indicating its n th harmonic by $(N_L)_n$ we have

$$(N_L)_n = \frac{3}{2} \frac{\theta_0}{\theta_m} \frac{1}{R} (lh)_n \quad \dots \quad (20)$$

and we may express our solution for the n th harmonic of N_i , N_1 , N_2 and N_3 in this quantity. We have already seen that the zero and first order harmonics are zero. The higher order terms are given by table I. From this table we may conclude that, as we might have expected, the shift of the deepest equipotential surface shows the quickest approach to zero for increasing values of n , i.e. for features of decreasing horizontal extent.

For determining the shift of the geoid and of the inside potential surfaces as brought about by the presence of the masses $m_0 - m_c$ of formula (2) we may use the same method. By adding the results thus obtained for N''_i , N''_1 , N''_2 and N''_3 to the former figures we get the shift of these surfaces for the supposition of hydrostatic equilibrium. Expressing the results again in $(N_L)_n$ we get the values of table II. For this supposition also we may adopt the zero and first order harmonic terms to be zero.

TABLE I.

	$(N_i)_n$	$(N_1)_n$	$(N_2)_n$	$(N_3)_n$
	$(N_L)_n$	$(N_L)_n$	$(N_L)_n$	$(N_L)_n$
$n = 2$	+ 0.782	-- 1.218	- 1 003	- 0.543
$n = 3$	+ 0.933	- 1.067	- 0.751	- 0.235
$n = 4$	+ 0.969	- 1.031	- 0.623	- 0.116
$n = 5$	+ 0.987	- 1.013	- 0.530	- 0.060
$n = 6$	+ 0.995	- 1.005	- 0.456	
$n = 7$	+ 0.999	- 1.001	- 0.395	

TABLE II.

	$(N'_i)_n$	$(N'_1)_n$	$(N'_2)_n$	$(N'_3)_n$
	$(N_L)_n$	$(N_L)_n$	$(N_L)_n$	$(N_L)_n$
	+ 2.359	+ 0.359	+ 0.293	+ 0.161
	+ 1.776	- 0.224	- 0.160	- 0.050
	+ 1.550	- 0.450	- 0.272	- 0.050
	+ 1.433	- 0.567	- 0.297	- 0.034
	+ 1.358	- 0.642	- 0.292	
	+ 1.305	- 0.695	- 0.274	

Examining the tables we see that in general the shift of the inside potential surfaces is opposed in sign to that of the geoid. For the hypothesis of hydrostatic equilibrium

1) Bulletin Géodésique, No. 26.

the second order term makes an exception to this rule; this term of the shift of the inner surfaces has the same sense as that of the geoid. The terms of low order of the shift of the geoid are considerably larger for this supposition than the corresponding terms for the hypothesis of exact mass compensation; for the second order term it is even three times as much. For higher values of n the terms of both suppositions converge towards the values given by the approximate formula of LAMBÉRT but for the case of hydrostatic equilibrium they do so in a much slower way. If for deriving the results for this last case we take into account the increase of gravity downwards, the same remarks remain valid but in a slightly stronger degree. As we have already set forth the differences from corresponding values of the tables I and II in that case are $1\frac{1}{4}$ times larger.

For deriving the indirect isostatic reduction we have to determine its two parts, the free air reduction over the distance N_i and the attraction by the mass-layers N_i , N_1 , N_2 and N_3 . Taking the sign of this reduction in such a way that it is the correction we have to subtract from the anomaly when reducing it isostatically, the first part is given by

$$\Delta_2 g_1 = -\frac{2g}{R} N_i \dots \dots \dots \dots \dots \quad (21)$$

The second part — or to put it more accurately the n th harmonic of this part — corresponds to the potential on the geoid given by the formulas (12), (16) and (18). According to what has been said the sum of these terms is equal to $g(N_i)_n$ minus (11). By multiplying this difference by the ratio $(R/r)^{n+1}$ and assuming $r > R$, we find the n th harmonic of the potential caused by these layers in the outside field and by differentiating this with regard to r and putting $r = R$ we obtain the n th harmonic of the attraction on the geoid. We thus obtain

$$\Delta_2 g_2 = \frac{g}{R} (n+1) (N_i)_n - 3 \frac{\theta_0}{\theta_m} \frac{g}{R^2} \frac{n(n+1)}{2n+1} (lh)_n. \dots \quad (22)$$

Taking the sum of the harmonic terms and adding this to (21) we find the total indirect reduction

$$\Delta_2 g = \frac{g}{R} \sum_2^{\infty} (n-1) (N_i)_n - 3 \frac{\theta_0}{\theta_m} \frac{g}{R^2} \sum_2^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} (lh)_n. \dots \quad (23)$$

In a similar way we may obtain the formula for the correction $\Delta_2'' g$ we have to add to $\Delta_2 g$ for finding the indirect reduction $\Delta_2' g$ for the supposition of hydrostatic equilibrium. We get

$$\Delta_2'' g = \frac{g}{R} \sum_2^{\infty} (n-1) (N_i'')_n - 6 \frac{\theta_0}{\theta_m} \frac{g}{R^2} \sum_2^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} (lh)_n. \dots \quad (24)$$

These two formulas allow the deriving of the indirect reduction for both hypothesis about isostasy; for the practical computing of N_i , N_i' , $\Delta_2 g$ and $\Delta_2' g$ we have, however, to bring the formulas in a more appropriate shape. The writer will not enlarge here on these formulas nor on the methods of computation as they have been used; for these questions he may refer to the more detailed publication which will shortly appear. Besides for N_i , N_i' , $\Delta_2 g$ and $\Delta_2' g$ tables have also been made for the correction which according to the deductions of this paper we have to apply to the geoid as it follows from deflections of the vertical.

At this moment the results of the computations are only ready for the HAYFORD

hypothesis for which we introduced $T = 56.85$ km and $a = 0$. The results for N'_i and $\Delta'_2 g$ may be written in the shape

$$N'_i = 7.11 h + 1.42 h' + F'_i \text{ meters}, \dots \quad (25)$$

$$\Delta'_2 g - \delta \gamma_0 - (\Delta'_1 g)_1 = -1.55 h - 0.23 h' + S' \text{ mgal} \dots \quad (26)$$

where h represents the mean topographic elevation in km over the HAYFORD zones $A - 17$ and h' the mean elevation over the zones $13 - 11$. For sea-areas h is 0.615 times the depth with negative sign. The quantities F'_i and S' have been tabulated. The values of F'_i vary from 1.7 m for $\varphi = 0^\circ$ and $\lambda = 0^\circ$ to 26.1 m for $\varphi = 40^\circ$ S and $\lambda = 80^\circ$ W, those of S' from -0.2 mgal for $\varphi = 40^\circ$ N and $\lambda = 80^\circ$ E to +5.8 mgal for $\varphi = 40^\circ$ S and $\lambda = 140^\circ$ W; the correlation to the topography is hidden by large other terms. The results for N'_i and $\Delta'_2 g$ deviate considerably from the approximate formulas of LAMBERT which by introducing the same figures for θ_0 , θ_m and l become¹⁾

$$N_L = 6.49 (h + 1.4) \text{ meters}, \dots \quad (27)$$

$$\Delta_2 g = -2.00 (h + 1.4) \text{ mgal}. \dots \quad (28)$$

The results found for N_i and $\Delta_2 g$ for the same values of $l = 56.85$ km and $a = 0$ show that the small differences in the conception of isostasy corresponding to the two suppositions of exact mass-compensation and of hydrostatic equilibrium bring about considerable differences for the geoid and the indirect isostatic reduction; these differences may attain values of about twelve meters and eight mgal.

¹⁾ Bulletin Géodésique No. 26, formula 2, p. 93.

F. A. VENING MEINESZ: THE EQUILIBRIUM FIGURE OF THE EARTH AND THE INDIRECT ISOSTATIC OR BOWIE REDUCTION.

TABLE of F'_l in m. (HAYFORD, $l = 56.85$ km, $a = 0$).

$\lambda =$ γ	-60°	-40°	-20°	0°	$+20^\circ$	$+40^\circ$	$+60^\circ$	$+80^\circ$	$+100^\circ$	$+120^\circ$	$+140^\circ$	$+160^\circ$	$+180^\circ$	-160°	-140°	-120°	-100°	-80°	-60°	-40°	-20°	0°		
70° N	+ 9.3		+ 8.4		+ 7.2		+ 10.0		+ 11.5		+ 10.2		+ 10.3		+ 8.8		+ 9.5		+ 9.3		+ 8.4			
60° N	+ 9.8		+ 6.1		+ 5.4		+ 10.5		+ 12.4		+ 11.4		+ 9.8		+ 12.5		+ 15.2		+ 9.8		+ 6.1			
40° N	+ 8.2	+ 3.7	+ 3.7	+ 2.7	+ 3.9	+ 7.5	+ 10.5	+ 14.0	+ 12.8	+ 12.3	+ 10.3	+ 6.6	+ 4.8	+ 7.2	+ 12.6	+ 13.7	+ 15.0	+ 11.9	+ 8.2	+ 3.7	+ 3.7	+ 2.7		
20° N	+ 8.8	+ 2.6	+ 4.0	+ 3.5	+ 4.0	+ 6.3	+ 6.9	+ 9.7	+ 13.8	+ 12.4	+ 10.6	+ 10.0	+ 7.8	+ 11.2	+ 12.5	+ 15.6	+ 18.1	+ 15.2	+ 8.8	+ 2.6	+ 4.0	+ 3.5		
0°	+ 13.2	+ 5.1	+ 2.2	+ 1.7	+ 3.0	+ 4.2	+ 2.5	+ 4.9	+ 9.8	+ 12.8	+ 14.3	+ 15.8	+ 13.0	+ 15.5	+ 16.1	+ 17.0	+ 20.0	+ 17.2	+ 13.2	+ 5.1	+ 2.2	+ 1.7		
20° Z	+ 20.5	+ 13.9	+ 7.2	+ 4.7	+ 3.8	+ 2.7	+ 1.5	+ 3.0	+ 9.5	+ 17.7	+ 20.9	+ 20.7	+ 22.1	+ 20.1	+ 21.1	+ 23.1	+ 22.8	+ 20.5	+ 13.9	+ 7.2	+ 4.7			
40° Z	+ 23.8	+ 17.4	+ 11.2	+ 7.2	+ 5.3	+ 8.0	+ 10.3	+ 9.4	+ 12.6	+ 20.0	+ 24.2	+ 25.5	+ 24.0	+ 25.3	+ 24.0	+ 24.7	+ 25.8	+ 27.1	+ 23.8	+ 17.4	+ 11.2	+ 7.2		

TABLE of S' in mgal. (HAYFORD, $l = 56.85$ km, $a = 0$).

$\lambda =$ γ	-60°	-40°	-20°	0°	$+20^\circ$	$+40^\circ$	$+60^\circ$	$+80^\circ$	$+100^\circ$	$+120^\circ$	$+140^\circ$	$+160^\circ$	$+180^\circ$	-160°	-140°	-120°	-100°	-80°	-60°	-40°	-20°	0°		
70° N	+ 1.0		+ 0.5		+ 0.5		+ 0.3		+ 0.5		+ 1.3		+ 1.7		+ 2.1		+ 1.7		+ 1.0		+ 0.5			
60° N	+ 1.1		+ 0.7		+ 0.5		0.0		+ 0.4		+ 1.4		+ 2.3		+ 2.1		+ 1.3		+ 1.1		+ 0.7			
40° N	+ 1.9	+ 1.7	+ 1.0	+ 0.8	+ 0.4	0.0	- 0.1	- 0.2	+ 0.7	+ 1.4	+ 2.3	+ 3.4	+ 4.2	+ 4.1	+ 3.3	+ 3.1	+ 2.4	+ 2.2	+ 1.9	+ 1.7	+ 1.0	+ 0.8		
20° N	+ 2.7	+ 2.6	+ 1.3	+ 0.8	+ 0.6	+ 0.3	+ 0.6	+ 0.9	+ 1.1	+ 2.2	+ 3.3	+ 4.0	+ 4.9	+ 4.7	+ 4.7	+ 4.1	+ 3.2	+ 2.8	+ 2.7	+ 2.6	+ 1.8	+ 0.8		
0°	+ 3.1	+ 3.2	+ 2.5	+ 1.9	+ 1.4	+ 1.2	+ 1.9	+ 2.2	+ 2.5	+ 3.1	+ 3.8	+ 4.3	+ 5.3	+ 5.3	+ 5.4	+ 5.1	+ 4.1	+ 3.7	+ 3.1	+ 3.2	+ 2.5	+ 1.9		
20° Z	+ 3.1	+ 2.9	+ 2.9	+ 2.6	+ 2.4	+ 2.5	+ 3.1	+ 3.6	+ 3.5	+ 3.2	+ 3.8	+ 4.6	+ 5.2	+ 5.4	+ 5.8	+ 5.4	+ 4.6	+ 3.8	+ 3.1	+ 2.9	+ 2.9	+ 2.6		
40° Z	+ 3.5	+ 3.6	+ 3.6	+ 3.7	+ 3.6	+ 3.1	+ 3.0	+ 3.8	+ 4.2	+ 3.9	+ 4.1	+ 4.7	+ 5.4	+ 5.5	+ 5.8	+ 5.5	+ 4.9	+ 4.1	+ 3.5	+ 3.6	+ 3.6	+ 3.7		

Embryology. — Sexreversal and chromosomes. By G. KREDIET.

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

Intersexes are animals formed by sexreversal, the sex of which is between male and female. They show characters belonging to both sexes. They used to be called hermaphrodites. According to the nature and structure of the genitalia they were divided into groups which were classed together in one scheme. By adding a few adjectives such a high degree of descriptive accuracy was indicated in the name that every expert knows at once with which he has to deal. Through these descriptions the appellation hermaphrodite will continue to be used.

The name intersex is of causal importance and, when preceded by male or female, indicates the true sex. This is not the case with hermaphrodites. Formerly nobody would have suspected that the male pseudo-hermaphrodite, characterized by two testes, is a female intersex. The animal belongs to the female sex and has been formed by sex-reversal, as the name intersex indicates. During this process it has developed male characters, which it shows later on.

But not only the so-called hermaphrodites among the mammals belong to the intersexes. Also the free-martins and gynandromorphs are reckoned among them. GOLDSCHMIDT has made the following division:

1. Time intersexes.
2. Space intersexes.
3. Hormonal intersexes.

By time intersexes he means those animals that begin their development in one sex, passed through a turning point, and finished their development in the direction of the other sex. For example, they were first female, then male, thus became intersex through the succession of sexes, that is according to time.

Space intersexes are those animals which during their development have lost one chromosome in a cleavage, for example the first, so that one blastomere has become male, the other female. If this first cleavage lay in the developing median plane of the animal, one half would become female and the other male. Then the animal would be a so-called bilateral gynandromorph. Among mammals such individuals have not yet with certainty been found, but among birds they are known. The latter are explained by assuming that a predisposed male animal having two X -chromosomes has lost one, so that all the descendants of this cell have one X -chromosome, and consequently become female cells. So there will be male and female characters lying side by side in one individual. According to this spatial division these animals are called space intersexes.

Hormonal intersexes have so far been found chiefly among cattle, but they also occur among pigs (HUGHES, HOADLEY) and goats (KELLER). A free-martin is formed in dizygote twinning of different sex, in which the two chorions have been intimately fused and in which the placental circulations are closely united by a directly perceptible anastomosis, so that substances from the bull calf can circulate into the cow calf and vice versa. It is worthy of note that the bull calf almost always remains normal and the cow calf develops abnormal genitalia, in which the male characters may be more or less strongly prominent. If one calls the substances activating this process active substances or hormones the name hormonal intersexes speaks for itself.

In the time- and hormonal intersexes the sexreversal is most evident. The gynandromorphs show it only partly. So it is obvious that a comparative study can be made of free-martins and hermaphrodites. In another respect the space intersexes are more like the free-martin, because, when taking a bilateral gynandromorph as an example, one has to deal with an individual having an ovary on one side and a testis on the other.

a state of things as we find in the free-martin, which has been formed after a joint circulation of a bull calf with testes and a cow calf with ovaries. If looking at it from this point of view a third animal will have to be compared, viz. the lateral hermaphrodite, which is a true intersex and which, just as the bilateral gynandromorph has an ovary and a testis for gonads. For this reason there are some investigators who call the lateral hermaphrodite a gynandromorph. So we have to deal with three animals which have in common that during their development they were affected by an ovary and a testis, viz. free-martin, bilateral gynandromorph and lateral hermaphrodite. Curious enough they have become three very different individuals.

Comparing first the free-martins with the true intersexes there is at once a point of resemblance in the sexreversal. Also in the true intersexes this goes as a rule from female to male. On the other hand we find here one great exception. The greatest difference appears when discussing the cause of the sexreversal. To make this clear it may be useful to state shortly in what way sex is determined. In fertilization there are two chances which are about equal. The animal becomes either male or female. These equal chances are formed because there are two sorts of sperms, viz. with 1 X -chromosome and without this chromosome. The other chromosomes in the nucleus are classed under the name of autosomes; so if we write the formula of the sperms it will be $A + X$ and $A + O$. For the ripe eggcells it is always $A + X$. A female mammal has $2A + 2X$, a male $2A + X$. An $A + O$ sperm with an $A + X$ eggcell gives a $2A + X$ individual, that is a male. An $A + X$ sperm and a $A + X$ egg gives a $2A + 2X$ individual, that is a female. There are as many $A + X$ as $A + O$ sperms, therefore the chances are equal.

From this way of representation it follows that there are only two sexes, which can only be different in X . All other differences result from this.

Seemingly at variance with this truth is the fact that every animal is predisposed bisexual. GOLDSCHMIDT has given the following explanation of it. In every animal there are male and female sexfactors, which also in fertilization have their influence. For the formation of a normal male it is not only necessary that the male factors suppress the female ones entirely, but besides they have to be much stronger. So to say, they must have superior valence. Thus there must be a certain epistasis which is to exceed a certain minimum. If this does not occur, the foundation is laid for the formation of an intersex. In case of a copulation of a "strong" male animal with a "weak" female one it may occur that the male animals are normal but that the female ones are intersexes, because in such a female animal the female factors do not get sufficient epistasis against the male ones. The influence of the male factors is not sufficiently suppressed and can assert itself. It is not explained why exactly it should go in this order that first the female are set to operate and then the male ones, so that a succession of sexes develops. This we have to accept as a fact.

The seat of the female factors F is sought in the X -chromosomes, whereas that of the male M is assumed to be spread over the autosomes. A male animal can thus be represented by MMF and a female by $MMFF$. MM must be stronger than F and FF stronger than MM if a normal sex is to be formed. In a female intersex the development begins according to the chromosomes of the fertilized egg $2A + 2X$, that is female, to be followed after the turning point by the male. The chromosome formula does not change, because we have here to do with factors which are equally balanced. That these chromosomes remain unchanged can be demonstrated by the following: A short time ago a male pseudo-hermaphrodite, of the testes of which we had made many slides, was examined again. It struck me that there were many spermatogonia which showed the chromosomes clearly apart. These spermatogonia were probably ripe for degeneration, as one can also observe in developing testes. It looks as if they are preparing for cell division, and then they are, so to say, attacked by degeneration. VON WINIWARTER and SAINMONT have also pointed out this peculiar symptom. After convincing myself that the entire nucleus was visible in the slide, I ordered the draughtsman of our institute to draw the chromosomes. For this purpose he had to project in a flat plane what he

saw in the more or less bulb-shaped nucleus. He had not been told what significance might be attached to his drawing, so that he quite objectively rendered what he saw. I myself was very anxious to know whether the female or the male number of chromosomes would appear. The male pseudo-hermaphrodite was a pig. The female has $40 = 2 \times 20$ and the male $39 = 2 \times 20 - 1$ chromosome. There appeared to be 40 (fig. 1 en 2) and as still may be seen from many chromosomes they are lying in pairs. In my

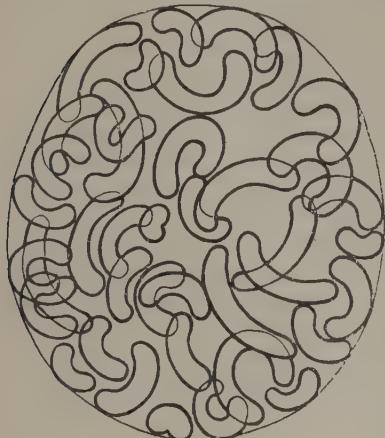


Fig. 1.

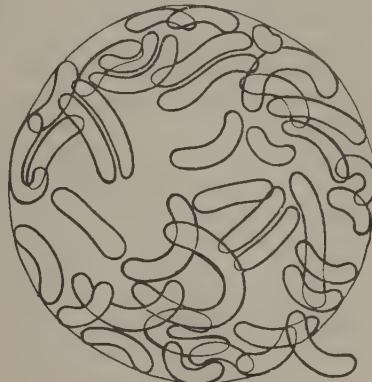


Fig. 2.

opinion this is a conclusive proof that this animal with testes was not a male but a female and consequently that a sexreversal must have taken place, for otherwise no testes could have been formed.

The question which forces itself to the front with respect to the action of the male and female chromosomal factors is what idea one must form of the way in which those factors can make their influence felt. GOLDSCHMIDT thought we had to do with an action of enzymes. These active substances are believed to be secreted by the chromosomes, first to be active in the cell and its immediate surroundings and later to pass in the circulation, so that it can perform its metabolic and morphogenic action in those places where it is needed. So one may call them chromosomal enzymes, which are secreted in all the cells of the body, for all the cells of the body possess nuclei with chromosomes. Consequently all the soma is not only sex-impregnated, but it is also believed to form enzymes which permeate the whole body through the circulation.

It is difficult in one single body to furnish the proof of this hypothesis, but the placental anastomosis between two animals of different sex, as is the case with the development of the free-martin, offers a possibility to get a better insight.

In the bull calf, in which the epistasis of the male factors is greatest, the female ones are suppressed. In the cow calf the epistasis is the reverse. After the realization of the anastomosis male factors will pass into the female animal and female factors into the male. *MMF* and *MMFF* will be mixed into *MMMMFFF*. Here we have epistasis again. The *M*-factors can only then be strongest if the epistasis in the male animal is greater than in the female. KELLER and MOSZKOWICZ assumed this to be so and explain by it the sex changes which take place in the female animal. In point of fact the changes coming about in the time intersex and in the freemartin are assumed to rest on this basis. However the greatest differences appear when the animals are born. Then the twins get separated, the free-martin is withdrawn from the action of the male epistasis, while in the time intersex things remain as they were. Is it possible that the female factors in the originally female free-martin become predominant again? Nothing of it could be observed. The animal grows into a being resembling much a castrated cow, but which

it is not. It has a somewhat different shape, so that NUMAN was already able to discriminate between them. It is still in the possession of the gonads, which often look more like testes than ovaries. Gametes have never been found in them. In RINGER's laboratory MARSHMAN has made a research in order to find out whether sex hormones occur at all in the urine of the free-martin. He has not been able to find them. If this gives us a right to assume they were also non-existent in the animal itself, then it would make it clear that the gonads of these animals not only produce no gametes but that they secrete no hormones either, consequently they might just as well be absent. A research made by DE REGT to find out whether sex hormones occurred in the urine of a time intersex, a pig, has proved that they were found here in sufficient quantities, so that the gonads of these animals, although impotent as a rule, do continue their internal secretory functions. One gets a strong impression that by the sexreversal under the influence of the male chromosomal factors the free-martin has become both intersex and sexually neutral. It seems as if the chromosomal sex factors are no longer active. In castrated animals they certainly are. Geldings, castrated stallions, keep their sexual drive, although in a less degree, even if they have been castrated at an early age. Occasionally free-martins have been observed to show heatsymptoms; some are also recorded to be fertile. It is possible that these animals had become male in a slight degree or that a revival of the female factors has taken place after birth. It may also be that these animals were no free-martins, for the fact must never be accepted before we are absolutely certain that they formed in heterosexual twinning with chorionic anastomosis. So long as there is no absolute certainty in this respect it is difficult to judge about these few deviating cases.

The bilateral gynandromorphs, as have been observed a single time among birds, in which one half of the body is female and the other male, are the most puzzling beings that occur in the domain of intersexuality. Neither by means of the chromosomal factors nor by those of the sex hormones can any explanation be given. The gynandromorphs of PÉZARD may be left out of consideration because he had to deal with castrated fowl only differing in the feathers which had grown after castration. They remained animals of the female sex.

Lateral hermaphrodites are intersexes which somatically and psychically are not distinguishable from other time intersexes. The two halves of the body are equal, in contrast with gynandromorphs; only the gonads are different on both sides. Why the sexreversal showed itself in one of the gonads by the change of ovary into testis and not in the other is unknown. Perhaps we can approach it by making a series of the differences in gonads found in intersexes. It is quite common to find a testis on one side and an ovariotestis on the other. The ovarian part may be of different size. It may be larger than the testicular one. I once found a hermaphrodite in which the ovary contained such an infinitesimally small part of a testicle that it only became visible after making a series of microscopic slides. We had practically to do with an ovariotestis. If this small part is also absent, as is the case in the lateral hermaphrodites, then the series ranging from ovariotestis to ovary on one side is complete. We can only approximately conceive the fact that these animals are after all time intersexes. Therefore they must be compared with hermaphrodites in the same way as has already been done for the other time intersexes.

Up to now in my explanation of the free-martin I have left out of account the almost universally accepted theory of LILLIE, who is of opinion that the changes in the free-martin are to be ascribed to the action of the hormones, which are said to be secreted by the testes of the bull calf. The fusion of the two choria takes place when the fetus has grown to a length of 10—15 mm, the vascular development and the anastomosis taking place a little later. When the fetus has grown to a size of about 25 mm the chorionic fusion has already been established. BASCOM and VAN VLOTEN have demonstrated that in a bull fetus of 25—28 mm interstitial cells are already to be seen in the embryonic testis. Consequently the interstitial gland which is held to be the nursery of

the testicular hormones exists already a short time after the anastomosis develops. At this stage little change is to be noticed in the ovary, so that it is assumed that the internal secretion of the testis has started before there is any question of ovarian hormonal secretion. Under the influence of these male hormones the cow calf is believed to undergo the changes in the male direction, whereas nothing can happen with the bull calf.

Some objections may be raised against this theory. KELLER has directed the attention to it, that it is difficult to assume that testes of such young embryos should be capable of secreting hormones. Even in a free-martin of 32 mm BISSONETTE noticed some changes in the genitalia. It is difficult to prove that the testes in which interstitial cells are present, however young the gonad may be, secrete internally. We do know of researches by RUMPH and SMITH, which have demonstrated that a thyroid gland of a pig fetus of 7 cm secreted no hormones, but that one of 9 cm did; we also know that the hypophyses of pig fetus of 14—16 cm have no endocrine functions and those of 26—28 cm have. It would therefore be an exception if the testes of a 3 cm cow fetus already showed endocrine action.

But more strongly against LILLIE's theory militate the results of the experiments of RAYNAUD, IVY and GREENE, GREENE, BURRILL and IVY and of VERA DANTSCHAKOFF. The latter injected a male hormone testosterone propionate into the allantoic sac of young cavia embryos, and noticed that the male parts of the bisexual predisposed genitalia of the female embryos began to develop. The gonads underwent no change. The Müllerian ducts grew into normal tubae and uterus, influenced by the female chromosomal factors. The caudal part of the genitalia proceeding from the sinus urogenitalis became purely male. After birth all the testosterinized guinea pigs resembled males, but after half a year the male part of the bisexual genitalia had been reduced to those of a castrate. Sometimes the epididymus have got lost. Ovaries, tubae and uterus continue their normal development as in a female animal. Even eggs can be fertilized, when after laparotomy sperm is put into the uterus.

Between these testosterinized cavia females and free-martins there are great differences:

1. a. *Free-martins*: gonads always have more or less developed in a male direction. Gametes have never been found.
- b. *Testosterinized cavia females*: ovaries are unchanged, ripe eggs can even be fertilized.
2. a. *Free-martins*: Müllerian ducts are strongly reduced.
- b. *Testosterinized cavia females*: Müllerian ducts are normally developed.
3. a. *Free-martins*: external genitalia almost always female.
- b. *Testosterinized cavia females*: external genitalia male.

There is some similarity in the male development of the Wolffian ducts and also partly in that of the accessory glands (seminal vesicle).

VERA DANTSCHAKOFF justly remarks that the male active substance from which the free-martin grows is unknown. The experiments of VERA DANTSCHAKOFF, RAYNAUD, IVY, GREENE and BURRILL make it clear that the testicular hormone cannot be that substance, because it acts in a different way from that which influences the cow calf in the heterosexual twinning with placental vascular anastomosis. The testosterone confines itself to the predisposed male parts of the genitalia and leaves the female untouched.

For the present it seems to me that I am fully justified in sharing KELLER's view rather than LILLIE's. In what way the sex chromosomes work is unknown, but it is probable that in some way or other they are able via the circulation to exercise their influence on the sexual development of the individual.

Mathematics. — Beiträge zur Theorie der Systeme PFAFFscher Gleichungen Von
J. A. SCHOUTEN und W. VAN DER KULK.

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

V. Das Haupttheorem für das allgemeine \mathfrak{S}_d^{n-1} -Feld.

Einleitung. Das in den vorangegangenen Mitteilungen bewiesene Haupttheorem besagt, kurz gefasst, dass jedes einfache kovariante q -Vektorfeld $w_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$, dessen Halbrang gleich q ist, q linear unabhängige Vektorteiler besitzt, deren Klassen höchstens gleich $2q+1$ sind. Inzwischen hat E. CARTAN¹⁾ einen anderen Beweis dieses Haupttheorems gegeben, der auf eine Anwendung der CARTAN-KÄHLERSchen Theoreme beruht. Es hat sich nun gezeigt, dass das Haupttheorem ebenfalls gilt für das allgemeine \mathfrak{S}_d^{n-1} -Feld und dass sich die CARTANSche Beweismethode leicht so modifizieren lässt, dass sie auch für diesen Fall anwendbar bleibt. Ist aber das Haupttheorem in dieser allgemeineren Fassung bewiesen, so ist es ein leichtes jetzt sämtliche Faktoren aller möglichen Klassen eines gegebenen einfachen kovarianten q -Vektorfeldes zu bestimmen und damit ein System von arithmetischen Invarianten zu gewinnen, die zur Klassifizierung der q -Vektorfelder benutzt werden können. Außerdem ist das Problem gelöst für ein gegebenes System von PFAFFschen Gleichungen das einfachste äquivalente System zu bestimmen.

§ 1. Das Haupttheorem für das \mathfrak{S}_d^{n-1} -Feld.

Unter einer \mathfrak{S}_d^{n-1} in einem Punkte ξ^x einer X_n verstehen wir ein System von ∞^d in der lokalen E_n von ξ^x definierten $(n-1)$ -Richtungen. Jeder $(n-1)$ -Richtung im Punkte ξ^x ist in eineindeutiger Weise ein bis auf einen skalaren Faktor bestimmter kovarianter Vektor w_λ zugeordnet. Ein \mathfrak{S}_d^{n-1} -Feld lässt sich also durch $n-d-1$ in den w_λ homogene unabhängige Gleichungen

$$B_b(\xi^x, w_\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} 0; \quad \nu, \lambda = 1, \dots, n; \quad b = 1, \dots, m; \quad m = n-1-d; \quad (1)$$

festlegen. Von diesem Gleichungssystem fordern wir, dass

- a. die B_b in einer \mathfrak{U} einer Nullstelle $\begin{pmatrix} \xi^x \\ 0 \end{pmatrix}$ von (1) analytisch sind;
- b. der Rang der Matrix der

$$B_x^b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial B_b}{\partial w_x}; \quad \nu = 1, \dots, n; \quad b = 1, \dots, m \quad \dots \quad (2)$$

in dieser \mathfrak{U} $\begin{pmatrix} \xi^x \\ 0 \end{pmatrix}$ maximal, also m ist.

Das \mathfrak{S}_d^{n-1} -Feld lässt sich auch durch ein System von n Gleichungen

$$w_\lambda = C_\lambda(\xi^x, w_y); \quad \nu, \lambda = 1, \dots, n; \quad y = m+1, \dots, n \quad \dots \quad (3)$$

mit den $(n-m)$ homogenen Parametern w_y darstellen. Da es für w_λ auf einen beliebigen skalaren Faktor nicht ankommt, dürfen wir annehmen es seien die C_λ in den w_y homogen vom Grade 1. Von dieser Parameterdarstellung fordern wir, dass

¹⁾ E. CARTAN, Sur un théorème de J. A. SCHOUTEN et W. VAN DER KULK, C. R. 211 (1940) 21–24.

a. die C_λ in einer $\mathfrak{U}(\xi^x, \overset{0}{w_y})$ analytisch sind, wo die ξ^x und $\overset{0}{w_y}$ so gewählt sind, dass sie vermöge (3) die Nullstelle $\xi^x, \overset{0}{w_\lambda}$ von (1) festlegen;

b. der Rang der Matrix

$$C_\lambda^x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial C_\lambda}{\partial w_x}; \lambda = 1, \dots, n; x = m + 1, \dots, n \dots \dots \quad (4)$$

in dieser $\mathfrak{U}(\xi^x, \overset{0}{w_y})$ maximal, also $n-m$ ist. Einerseits erfüllt (3) die Gleichungen (1), d.h. es gilt in der $\mathfrak{U}(\xi^x, \overset{0}{w_y})$

$$B_b(\xi^x, C_\lambda) = 0; b = 1, \dots, m, \dots \dots \dots \quad (5)$$

identisch in den Variablen ξ^x, w_y . Anderseits geht (1) aus (3) hervor durch Elimination der w_y . Die Darstellungen (1) und (3) sind also gleichwertig.

Differentiation von (5) nach w_x ergibt

$$B_b^x C_\lambda^x = 0; b = 1, \dots, m; x = m + 1, \dots, n. \dots \dots \quad (6)$$

Diese Gleichungen besagen, dass B_b^x und C_λ^x , berechnet für eine Nullstelle ξ^x, w_λ von (1) (oder für das mit dieser Nullstelle korrespondierende Wertesystem ξ^x, w_y), dieselbe m -Richtung im Punkte ξ^x darstellen. Diese m -Richtung ist in der $(n-1)$ -Richtung von w_λ enthalten, denn, wegen der Homogenität der B_b in den w_λ folgt aus (1)

$$B_b^x w_x = 0; x = 1, \dots, n; b = 1, \dots, m, \dots \dots \dots \quad (7)$$

und wegen der Homogenität der C_λ in den w_λ ist (3) gleichbedeutend mit

$$w_\lambda = C_\lambda^x w_x. \dots \dots \dots \dots \dots \quad (8)$$

Beide Gleichungen (7) und (8) besagen also tatsächlich, dass die m -Richtung in der $(n-1)$ -Richtung von w_λ enthalten ist. Deutet man die w_λ als homogene Koordinaten in einem $(n-1)$ -dimensionalen lokalen projektiven Raum \mathfrak{P}^{n-1} , so wird die lokale \mathfrak{S}_d^{n-1} in ξ^x auf eine d -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von \mathfrak{P}^{n-1} abgebildet, während die ∞^d $(n-1)$ -Richtungen, die die durch B_b^x, C_λ^x aufgespannte m -Richtung enthalten, auf die Punkte des Tangentialraumes der \mathfrak{S}_d^{n-1} im Punkte w_λ abgebildet werden. Damit ist eine geometrische Deutung der durch B_b^x und C_λ^x dargestellten m -Richtung gewonnen.

Ein Vektorfeld

$$w_\lambda = w_\lambda(\xi^x); \lambda = 1, \dots, n \dots \dots \dots \quad (9)$$

der X_n heisse eine *Lösung* des \mathfrak{S}_d^{n-1} -Feldes, wenn es die Gleichungen (1) erfüllt, anders gesagt, wenn es Funktionen $w_y(\xi^x)$ gibt, die bei Substitution in (3) gerade das Feld (9) liefern. Geometrisch besagt dies, dass die $(n-1)$ -Richtung von (9) in jedem Punkte ξ^x der lokalen \mathfrak{S}_d^{n-1} angehört. Ist p eine *feste* ganze Zahl, so nennen wir das \mathfrak{S}_d^{n-1} -Feld *vollständig integrabel* für Lösungen der Klasse $k = 2p + 1$, wenn es zu jeder Nullstelle

ξ^x, w_λ des Feldes in der $\mathcal{U}(\xi^x, w_\lambda)$ wenigstens eine Lösung (9) der Klasse $2p+1$ gibt, die für $\xi^x = \xi^x$ in w_λ übergeht.

Um n. u. h. Bedingungen für die vollständige Integrierbarkeit zu gewinnen betrachten wir für jede Nullstelle ξ^x, w_λ des \mathbb{S}_d^{n-1} -Feldes den Bivektor

$$C_{ba} \stackrel{\text{def}}{=} -2 B_{[b}^u \bar{\partial}_{|\mu|} B_{a]} \quad ; \quad \bar{\partial}_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}, \quad (w_\lambda \text{ nicht differenzierbar}); \quad a, b = 1, \dots, m. \quad (10)$$

Die C_{ba} sind die POISSON'schen Klammerausdrücke des Systems (1). Man kann C_{ba} also den POISSON'schen Bivektor des \mathbb{S}_d^{n-1} -Feldes nennen. Durch Anwendung von (5) ergibt sich der Ausdruck

$$C_{ba} = 2 B_b^u B_a^\lambda \bar{\partial}_{[\mu} C_{\lambda]} \quad . \quad (11)$$

dessen rechtes Glied als Funktion der ξ^x, w_y zu betrachten ist. Das rechte Glied von (10) ist dagegen eine Funktion der ξ^x, w_λ , die aber nur für die Nullstellen von (1) betrachtet wird. Ist 2ϱ der Rang des Bivektors C_{ba} (nur berechnet für die Nullstellen des \mathbb{S}_d^{n-1} -Feldes), so nennen wir ϱ den Halbrang des \mathbb{S}_d^{n-1} -Feldes. Ist ϱ in der ganzen $\mathcal{U}(\xi^x, w_y)$ (anders gesagt für alle Nullstellen von (1) in $\mathcal{U}(\xi^x, w_\lambda)$) konstant, so nennen wir das \mathbb{S}_d^{n-1} -Feld in dieser \mathcal{U} *rangfest*.

Es gilt nun folgendes

Haupttheorem für das allgemeine \mathbb{S}_d^{n-1} -Feld:

Notwendig und hinreichend für die vollständige Integrierbarkeit eines \mathbb{S}_d^{n-1} -Feldes für Lösungen der Klasse $2p+1 \leq n$ ist, dass das Feld in der betrachteten \mathcal{U} *rangfest* ist und p den Ungleichungen $\varrho \leq p \leq \varrho + d$ genügt.

Für den speziellen Fall, dass die C_λ linear homogen in den w_y sind, geht die \mathbb{S}_d^{n-1} in jedem Punkte über in die $\infty^d(n-1)$ -Richtungen, die die durch B_b^x, C_λ^x (die jetzt von den w_λ bzw. w_x unabhängig sind!) aufgespannte m -Richtung enthalten, und es entsteht das Haupttheorem in seiner schon bewiesenen weniger allgemeinen Fassung.

Der Beweis verläuft folgendermassen. Man betrachtet die X_{2n-m} mit den $2n-m$ Koordinaten ξ^x, w_y und führt das Problem zurück auf die Bestimmung der Integral- X_n eines KÄHLER'schen Gleichungssystems in dieser X_{2n-m} . (Dies ist dem CARTAN'schen Ansatz analog). Sodann gelingt es eine Dimensionerniedrigung durchzusetzen und zu einem KÄHLER'schen System in einer $X_{2n-2m+2\varrho}$ zu gelangen, dessen Integral- $X_{n-2m+2\varrho}$ zu bestimmen sind. Es ergibt sich, dass dieses System schon vollständig ist, sodass es nicht weiter vollständig gemacht zu werden braucht. Sodann sind die regulären Ketten im KÄHLER'schen Sinne zu bestimmen und es stellt sich heraus, dass dies in der Tat gelingt. Dabei findet man, dass die gesuchte allgemeine Integral- $X_{n-m+2\varrho}$, die das Problem löst, schliesslich bestimmt ist durch $(n-m)$ Funktionen von bzw. $2\varrho+1, \dots, 2\varrho+n-m$ Variablen. Der Beweis ist damit geliefert.

Für Gleichungssysteme der Form (1), die nicht homogen sind in den w_λ , gilt ein Haupttheorem von ähnlicher Form, dessen Beweis in analoger Weise verläuft.

2. Die Lösungen eines \mathfrak{S}_d^{n-1} -Feldes von beliebiger Klasse.

Man kann jetzt allgemeiner fragen die Lösungen von der Klasse $2p+1$ eines \mathfrak{S}_d^{n-1} -Feldes zu bestimmen, wo p eine beliebige ganze Zahl ist, $2p+1 \leq n$. Der für das Haupttheorem skizzierte Beweis lehrt schon, dass für $p > \varrho + d$ keine solche Lösungen existieren. Für $\varrho \leq p \leq \varrho + d$ tritt aber infolge des Haupttheoremes vollständige Integrabilität auf. Es ist also nur noch der Fall $p < \varrho$ zu erledigen. Nun gilt der

Satz: Ist $0 \leq p < \varrho$, so lässt sich aus dem \mathfrak{S}_d^{n-1} -Feld stets ein $\mathfrak{S}_{d_p}^{n-1}$ -Feld mit Halbrang $\varrho_p \leq p$ konstruieren, so dass die beiden Felder dieselben Lösungen von der Klasse $\leq 2p+1$ besitzen.

Zum Beweise nehmen wir einmal an es sei gelungen die w_y in (3) als Funktionen der ξ^y so zu bestimmen, dass eine Lösung der Klasse $\leq 2p+1$ entsteht, für die also

$$(\partial_{[\mu} w_{\lambda_1]} \dots (\partial_{\mu} w_{\lambda_{p+1}]} w_{\lambda}) = 0. \quad \dots \quad (12)$$

ist. Differenziert man (3) nach ξ^μ , so entsteht

$$2 \partial_{[\mu} w_{\lambda]} = 2 \bar{\partial}_{[\mu} C_{\lambda]} + 2 (\partial_{[\mu} w_{|\nu]}]) C_{\lambda}^\nu. \quad \dots \quad (13)$$

Ueberschiebung mit $B_b^\mu B_a^\lambda$ liefert

$$2 (\partial_{[\mu} w_{\lambda]})) B_b^\mu B_a^\lambda = C_{ba} \quad \dots \quad (14)$$

und aus dieser Gleichung und (12) folgt

$$C_{[b_1 a_1} \dots C_{a_{p+1} b_{p+1}]} = 0; \quad a_1, \dots, a_{p+1}, \quad b_1, \dots, b_{p+1} = 1, \dots, m. \quad (15)$$

Jede Lösung von der Klasse $\leq 2p+1$ genügt also den Gleichungen (15). Infolgedessen sind die gesuchten Lösungen die Lösungen der Klasse $2p+1$ desjenigen $\mathfrak{S}_{d'}^{n-1}$ -Feldes, das man erhält, indem man zu (1) die Gleichungen (15) hinzufügt. Mit dem erhaltenen $\mathfrak{S}_{n'}^{n-1}$ -Feld fahren wir in derselben Weise fort und gelangen so nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einem $\mathfrak{S}_{d_p}^{n-1}$ -Feld, das dieselben Lösungen der Klasse $\leq 2p+1$ besitzt als das \mathfrak{S}_d^{n-1} -Feld, das sich aber durch den beschriebenen Prozess nicht weiter verkleinern lässt. Für dieses Feld müssen also die mit (15) korrespondierenden Gleichungen identisch erfüllt sein, d. h. der Halbrang ϱ_p muss $\leq p$ sein w. z. b. w.

Die Bestimmung der Lösungen von der Klasse $2p+1$ mit $p < \varrho$ ist also jetzt zurückgeführt auf die Bestimmung der Lösungen dieser Klasse eines $\mathfrak{S}_{d_p}^{n-1}$ -Feldes mit Halbrang $\varrho_p \leq p$, eine Aufgabe, deren Erledigung aber schon angegeben wurde. Wir bemerken noch, dass aus der Konstruktion des $\mathfrak{S}_{d_p}^{n-1}$ -Feldes folgt, dass in jedem Punkte ξ^y die lokale $\mathfrak{S}_{d_p}^{n-1}$ die lokale $\mathfrak{S}_{d_{p-1}}^{n-1}$ enthält, symbolisch

$$\mathfrak{S}_{d_p}^{n-1} \supseteq \mathfrak{S}_{d_{p-1}}^{n-1}. \quad \dots \quad (16)$$

Ferner sieht man leicht ein, dass das $\mathfrak{S}_{d_p}^{n-1}$ -Feld für $p = \varrho, \varrho + 1, \dots$ mit dem \mathfrak{S}_d^{n-1} -Feld zusammenfällt. Da das \mathfrak{S}_d^{n-1} -Feld jedenfalls keine Lösungen von der Klasse $2p+1$ mit

$p > \varrho + d$ besitzt, braucht man p nur von 0 bis $\varrho + d$ laufen zu lassen, sodass folgende Beziehungen resultieren

$$\mathfrak{S}_d^{n-1} = \mathfrak{S}_{d_{\varrho+d}}^{n-1} = \dots = \mathfrak{S}_{d_{\varrho}}^{n-1} \supseteq \mathfrak{S}_{d_{\varrho-1}}^{n-1} \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{S}_{d_1}^{n-1}. \quad \dots \quad (17)$$

§ 3. Die Faktoren von der Klasse $2p+1$ eines einfachen kovarianten $(n-m)$ -Vektorfeldes und die arithmetischen Invarianten α_p , β_p und γ_p desselben.

In X_n sei das einfache kovariante $(n-m)$ -Vektorfeld

$$w_{\lambda_{m+1} \dots \lambda_n} = C_{[\lambda_{m+1} \dots \lambda_n]}^{m+1} \dots C_{\lambda_n}^n. \quad \dots \quad (18)$$

gegeben mit in einer $\mathfrak{U}(\xi^x)$ analytischen Funktionen C_{λ}^x ; $\lambda = 1, \dots, n$; $x = m+1, \dots, n$ der ξ^x . Jedes Vektorfeld von der Form

$$w_{\lambda} = C_{\lambda}^x w_x. \quad \dots \quad (19)$$

wo die w_x beliebige in $\mathfrak{U}(\xi^x)$ analytische Funktionen der ξ^x sind, heisst ein *Teiler* oder auch ein *Faktor* von $w_{\lambda_{m+1} \dots \lambda_n}$. Das $(n-m)$ -Vektorfeld ist bis auf einen skalaren Faktor dem alternierenden Produkt von $(n-m)$ beliebigen linear unabhängigen Teilern gleich. Die Gleichung (19) definiert ein \mathfrak{S}_d^{n-1} -Feld, $d = n-m-1$, und mit Hilfe des in § 2 beschriebenen Prozesses kann man also für dieses Feld die Reihe (17) bestimmen und die Teiler von der Klasse $2p+1$ berechnen.

Für beliebige ganze Werte von p , $2p+1 \leq n$, definieren wir nun folgende arithmetische Invarianten:

- α_p = die maximale Anzahl der linear unabhängigen Teiler von der Klasse $2p+1$;
- β_p = die maximale Anzahl der linear unabhängigen Teiler von der Klasse $\leq 2p+1$;
- γ_p = die maximale Anzahl der Teiler von der Klasse $2p+1$, die sowohl voneinander als auch von den β_{p-1} Teilern von der Klasse $\leq 2p-1$ linear unabhängig sind; $\gamma_0 = \beta_0$.

Alle diese Invarianten lassen sich mit Hilfe der in § 2 entwickelten Theorie rein durch algebraische Prozesse und Differentiationen bestimmen. Die geometrische Deutung von β_p ist folgende. Man bestimme in der schon oben erwähnten \mathfrak{P}^{n-1} aller kovarianten Vektoren w_{λ} des Punktes ξ^x den kleinsten linearen Raum L^p , der die lokale $\mathfrak{S}_{d_p}^{n-1}$ enthält. Sodann ist β_p-1 die Dimension dieses Raumes. Der Beweis folgt aus der vollständigen Integrabilität des $\mathfrak{S}_{d_p}^{n-1}$ -Feldes für Lösungen von der Klasse $2\varrho_p+1 \leq 2p+1$.

Wegen (17) ist L^{p-1} in L^p enthalten, d. h. es ist

$$\beta_{p-1} \equiv \beta_p. \quad \dots \quad (20)$$

Die Definition von γ_p besagt aber, dass sogar

$$0 \equiv \gamma_p = \beta_p - \beta_{p-1} \quad (\beta_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} 0) \quad \dots \quad (21)$$

ist. Es folgen hier noch einige andere Ungleichungen. Erstens folgt aus der Definition von α_p und β_p

$$0 \equiv \alpha_p \equiv \beta_p. \quad \dots \quad (22)$$

Ferner ist

$$a_\varrho = a_{\varrho+1} = \dots = a_{\varrho+d} = n-m; \quad a_{\varrho+d+1} = \dots = a_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} = 0 \quad (23)$$

$$\beta_\varrho = \beta_{\varrho+1} = \dots = \beta_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} = n-m.$$

$$\gamma_{\varrho+1} = \dots = \gamma_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} = 0.$$

Für die Summe aller γ_p gilt

$$\sum_{p=1}^{p=\varrho} \gamma_p = \beta_\varrho = n-m. \quad \dots \quad (24)$$

und daraus geht hervor, dass sich γ_0 Teiler von der Klasse 1, γ_1 Teiler von der Klasse 3, u. s. w. bis einschliesslich γ_ϱ Teiler von der Klasse $2\varrho+1$ so wählen lassen, dass sie zusammen ein System von $(n-m)$ linear unabhängigen Teilern von $w_{\lambda_{m+1} \dots \lambda_n}$ bilden. Es gilt also der

Satz: Das $(n-m)$ -Vektorfeld $w_{\lambda_{m+1} \dots \lambda_n}$ ist bis auf einen skalaren Faktor das alternierende Produkt von γ_0 Teilern der Klasse 1, γ_1 Teilern der Klasse 3, u. s. w. bis einschliesslich γ_ϱ Teilern der Klasse $2\varrho+1$.

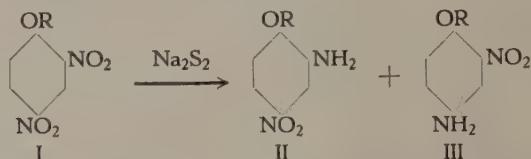
Durch diesen Satz wird eine Zerlegung des $(n-m)$ -Vektorfeldes in Faktoren niedrigster Klasse angegeben. Bei dieser Zerlegung liegen zwar die Zahlen $\gamma_0, \dots, \gamma_\varrho$ fest, nicht aber die Faktoren selbst.

Chemistry. — Ueber neue Süssstoffe und neue Lokalanästhetika. (Vorläufige Mitteilung.)
Von P. E. VERKADE, C. P. VAN DIJK und Fr. W. MEERBURG.

(Communicated at the meeting of May 30, 1942.)

§ 1. Von VAN DER WEYDEN¹⁾ sind einige 1-Alkyloxy-2,4-dinitrobenzene I (R = Me, Et, n. Pr, i. Pr und n. Bu) nach der von BLANKSMA²⁾ herriührenden Methode, d.h. in alkoholischer Lösung mit Natriumdisulfid partiell reduziert worden. Die isolierten Reaktionsprodukte wurden teils mit Recht (R = Me und Et) teils — wie sich unten zeigen wird — zu Unrecht (R = n. Pr, i. Pr und n. Bu) als reine 1-Alkyloxy-2-amino-4-nitrobenzene II betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit oder auch nur die Möglichkeit, dass neben den Verbindungen dieses Typus auch solche vom Typus III, also 1-Alkyloxy-2-nitro-4-amino-benzene entstehen, wird weder in der betreffenden Dissertation noch in der daraus hervorgegangenen Abhandlung von BLANKSMA und VAN DER WEYDEN³⁾ auch nur erwähnt, und es ist denn auch wohl nicht gewagt anzunehmen, dass nach der Anwesenheit letztgenannter Isomeren nicht oder wenigstens nicht sorgfältig gesucht wurde.

Bei sorgfältiger Wiederholung der betreffenden Versuche zeigte sich uns bald, dass in allen oben angedeuteten Fällen neben der Verbindung vom Typus II eine erhebliche Menge derjenigen vom Typus III vorhanden war. Auch bei der partiellen Reduktion von 1-Alkenyloxy-2,4-dinitrobenzenen (z.B. R = Allyl) oder 1-Aralkyloxy-2,4-dinitrobenzenen (z.B. R = Benzyl) mit Natriumdisulfid war solches der Fall. Die Trennung beider Isomeren bot keine Schwierigkeiten dar und konnte auf sehr verschiedene Weise geschehen, z.B. unter Benutzung der recht verschiedenen Löslichkeit von Salzen (Hydrochloriden, Sulfaten u.s.w.) der beiden Isomeren in Wasser.



Es genügt zurzeit zwei charakteristische Fälle etwas näher zu behandeln:

1) Bei der partiellen Reduktion von 1-Methoxy-2,4-dinitrobenzen in methylalkoholischer Lösung mit Natriumdisulfid wurden 1-Methoxy-2-amino-4-nitrobenzen (Schmp. 117—118°) und das gleichfalls bereits lange bekannte 1-Methoxy-2-nitro-4-aminobenzen (Schmp. 47.5—48.5°) in einem Verhältnis von etwa 8 : 2 erhalten. Konstitutionsbeweise für diese beiden Substanzen sind u.A. von VAN DER WEYDEN geliefert worden. Dieses Ergebnis ist um so auffallender, da ausser von VAN DER WEYDEN auch schon früher von BLANKSMA²⁾, welcher die partielle Reduktion in derselben Weise ausführte, nur das hochschmelzende Isomere gefunden war.

Das 1-Methoxy-2,4-dinitrobenzen ist auch mehrmals in alkoholischer Lösung mit Ammoniumhydrosulfid, bzw. Ammoniumsulfid partiell reduziert worden⁴⁾, zuletzt von

1) P. W. M. VAN DER WEYDEN, Dissertation Leiden, 1939.

2) J. J. BLANKSMA, Rec. trav. chim. **28**, 105 (1909); vgl. K. BRAND, J. prakt. Chem. (2) **74**, 449 (1906).

3) J. J. BLANKSMA und P. W. M. v. d. WEYDEN, Rec. trav. chim. **59**, 629 (1940).

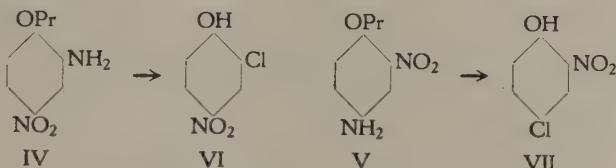
4) R. MELDOLA, G. H. WOOLCOTT und E. WRAY, J. Chem. Soc. **69**, 1329 (1896); H. VERMEULEN, Rec. trav. chim. **25**, 17 (1906).

Houben⁵⁾ und von Armburstmacher⁶⁾ während unter Leitung von Anschütz ausgeführter Untersuchungen, die später noch kurz zur Sprache kommen, und deren Zweck es war, den Verlauf derartiger partieller Reduktionen zu untersuchen. Immer wurde merkwürdigerweise nur das 1-Methoxy-2-amino-4-nitrobenzen isoliert; sogar aus der Beschreibung der Versuche von Houben und von Armburstmacher geht indessen keineswegs hervor, dass mit wirklicher Sorgfalt nach der Anwesenheit von 1-Methoxy-2-nitro-4-aminobenzen gesucht wurde. Sorgfältige Wiederholung der partiellen Reduktion der betreffenden Substanz in methylalkoholischer Lösung mit Ammoniumhydrosulfid lehrte uns nun, dass hierbei ganz entschieden auch das letztgenannte Isomere in namhafter Menge gebildet wird.

Bei der partiellen Reduktion von 1-n-Propoxy-2,4-dinitrobenzen in propylalkoholischer Lösung mit Natriumdisulfid wurden 1-n-Propoxy-2-amino-4-nitrobenzen IV (Schmp. 47.5—48.5°) und 1-n-Propoxy-2-nitro-4-aminobenzen V (Schmp. 28—29°) in einem Verhältnis von etwa 6:4 erhalten. Nebenbei sei hier bemerkt, dass sich beim Ansteigen in der homologen Reihe der 1-n-Alkyloxy-2,4-dinitrobenzene das Verhältnis der Mengen der beiden partiellen Reduktionsprodukte offenbar etwas zugunsten des niedrig schmelzenden Isomeren ändert.

Auch bei der partiellen Reduktion in propylalkoholischer Lösung mit Ammoniumhydrosulfid wurden beide Isomeren nebeneinander erhalten.

Die Verbindungen IV und V waren noch nicht in der Literatur beschrieben. Die Bestimmung ihrer Konstitution, welche bereits aus der gegenseitigen Lage ihrer Schmelzpunkte im Vergleich mit derjenigen bei den Methoxyverbindungen hervorging, geschah durch Ersatz der Aminogruppe durch ein Chloratom und darauffolgenden Ersatz der Alkyloxygruppe durch eine Hydroxylgruppe. Das Isomere vom Schmp. 47.5—48.5° lieferte dabei 2-Chlor-4-nitrophenol VI und hat also die Formel IV, während das Isomere vom Schmp. 28—29° dabei in 2-Nitro-4-chlorphenol VII überging und daher die Formel V besitzt:



Das von VAN DER WEYDEN erhaltene „dunkelrote Oel“, welches er als das reine 1-n-Propoxy-2-amino-4-nitrobenzen betrachtete, war in Wirklichkeit ein unterkühltes Gemisch der beiden Isomeren IV und V, zweifellos noch von Nebenprodukten begleitet, von denen hier das fraglos in kleiner Menge entstehende totale Reduktionsprodukt genannt sei. Nachdem die kristallinischen Isomeren uns in die Hände gekommen waren, begann auch das ganz nach den Anweisungen von VAN DER WEYDEN hergestellte „dunkelrote Oel“ bei Zimmertemperatur spontan zu kristallisieren; die nach beendigter Krystallisation abzentri-fugierten Krystalle erwiesen sich als das hochschmelzende Isomere.

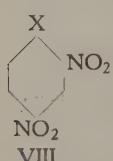
Die Meinung von VAN DER WEYDEN, dass sein „dunkelrotes Oel“ das reine 1-n-Propoxy-2-amino-4-nitrobenzen sein werde, stützt merkwürdigerweise auf einer hiermit vorgenommenen Konstitutionsbestimmung. Es erhebt sich also die Frage, welcher Fehler hierbei gemacht worden ist, infolgedessen die Anwesenheit des Isomeren übersehen werden konnte. Diese Frage ist leicht zu beantworten. Die vermeintliche diesbezügliche Konstitutionsbestimmung erfolgte in der auch von uns angewandten, oben angedeuteten Weise. Von den beiden dabei entstandenen Endprodukten, 2-Chlor-4-nitrophenol VI und 2-Nitro-

⁵⁾ H. Houben, Dissertation Bonn, 1911.

⁶⁾ A. Armburstmacher, Dissertation Bonn, 1914.

4-chlorphenol VII, ist — wie schon lange in der Literatur bekannt war⁷⁾ — die letztgenannte Substanz bedeutend leichter als die erstgenannte mit Wasserdampf flüchtig. Dies ist nicht zu verwundern, da 2-Nitro-4-chlorphenol eine Nitro- und eine Hydroxylgruppe in ortho-Stellung und infolgedessen fraglos einen Chelatring, eine innermolekulare Wasserstoffbrücke enthält. Der Fehler von VAN DER WEYDEN hat nun darin bestanden, dass eine wässrige Lösung der beiden betreffenden Substanzen stark eingeengt wurde, wodurch — zum Ueberfluss haben wir uns hiervon durch besondere Versuche noch überzeugt — das anwesende 2-Nitro-4-chlorphenol verloren gegangen ist.

§ 2. Eine etwas detaillierte Ansicht über den Verlauf der partiellen Reduktion von Verbindungen vom Typus VIII durch Zinnchlorür und Salzsäure oder durch „Schwefelammonium“ röhrt von ANSCHÜTZ⁸⁾ her. Was hier unter „Schwefelammonium“ verstanden werden soll, allein das von ihm immer benutzte Ammoniumhydrosulfid oder auch



Ammoniumsulfid, wird von ANSCHÜTZ nicht angegeben; die Vermutung liegt nahe, dass beide Reduktionsmittel gemeint sind. Die betreffende Ansicht wurde nicht scharf formuliert; sie läuft darauf hinaus, dass bei Benutzung der für Reduktion einer Nitrogruppe berechnete Menge Zinnchlorür immer in sehr überwiegendem Masse die ortho-ständige Nitrogruppe reduziert werden soll, während bei Benutzung der zur Reduktion einer Nitrogruppe erforderlichen Menge „Schwefelammonium“ gerade die para-ständige Nitrogruppe in überwiegendem Masse angegriffen werden soll, es sei denn, dass der Substituent X eine basische Gruppe (NH_2 und dergl.) oder eine Alkyloxygruppe ist, in welchen Fällen auch hier in überwiegendem Masse die ortho-ständige Nitrogruppe den Angriffspunkt bilden soll.

Auffallend ist es, dass die gangbare Ansicht über den Verlauf dieser Reduktionsprozesse, welche sich z.B. HOUBEN-WEYL's „Methoden der organischen Chemie“⁹⁾ entnehmen lässt, noch bedeutend simplicistischer ist; nach dieser soll in der Regel die partielle Reduktion mit Zinnchlorür und Salzsäure und diejenige mit Ammoniumhydrosulfid, Ammoniumsulfid, Natriumdisulfid u.s.w. absolut einseitig verlaufen, d.h. ausschliesslich die Amino-nitroverbindung mit ortho-, bzw. para-ständiger Aminogruppe liefern. Es ist wohl überflüssig, hier darzulegen, dass eine solche Auffassung bereits von theoretischem Standpunkt aus unhaltbar ist.

Die oben wiedergegebene Ansicht von ANSCHÜTZ beruht einerseits auf der Literatur entnommenen Angaben, welche auf in verschiedenen Medien und, insofern es sich um „Schwefelammonium“ handelt, mit Ammoniumhydrosulfid oder Ammoniumsulfid ausgeführten partiellen Reduktionen Bezug haben und — wir werden diese Behauptung hier nicht durch Argumente stützen — keineswegs immer für die in Frage stehende Verallgemeinerung brauchbar waren; anderseits auf den schon zitierten Untersuchungen von HOUBEN⁵⁾ und von ARMBRUSTMACHER⁶⁾, wobei unseres Erachtens die Art des Reaktionsproduktes ebenso wenig stets wirklich sorgfältig erforscht ist. Schon aus diesen Gründen war nach unserer Meinung die Frage berechtigt, ob die partielle Reduktion von Verbindungen vom Typus VIII mit Zinnchlorür und Salzsäure und mit „Schwefelammonium“ wirklich stets so einseitig zugunsten einer der beiden Nitrogruppen verläuft wie ANSCHÜTZ offenbar meinte. Auf Grund der von uns gemachten Erfahrungen bei der partiellen Reduktion von Verbindungen dieses Typus, welche in der 1-Stellung eine Alkyloxy-, eine Alkenyloxy- oder eine Aralkyloxygruppe enthalten, sind wir zu der Ansicht gelangt, dass dies wenigstens für die Reduktion mit „Schwefelammonium“ nicht

⁷⁾ A. FAUST und E. SAAME, Lieb. Ann. Suppl. Bd. 7, 190 (1870) — E. FAUST und E. MÜLLER, Ber. 5, 778 (1872).

⁸⁾ R. ANSCHÜTZ, Z. angew. Chem. 37, 352 (1914).

⁹⁾ Band II (1925), S. 379 und 383.

zutrifft. In diese Richtung weisen auch schon deutlich die Ergebnisse, welche KEHRMANN¹⁰⁾ bei der partiellen Reduktion von 1-Amino-2,4-dinitrobenzen und 1-Methylamino-2,4-dinitrobenzen mit alkoholischem Schwefelammonium erhalten hat.

Nach BOGERT und EVANS¹¹⁾ wird 1-Phenoxy-2,4-dinitrobenzen in alkoholischer Lösung durch Zinnchlorür und Salzsäure in 1-Phenoxy-2-nitro-4-aminobenzen übergeführt. Nachprüfung dieser Behauptung kommt uns nicht ganz unerwünscht vor. Falls tatsächlich die genannte Verbindung in sehr überwiegendem Masse entsteht, würde auch die von ANSCHÜTZ geäusserte Meinung über den Verlauf von partiellen Reduktionen mit Zinnchlorür und Salzsäure unrichtig sein.

Es muss sicherlich erwartet werden, dass bei partieller Reduktion mit Zinnchlorür und Salzsäure, Ammoniumhydrosulfid, Natriumdisulfid, Wasserstoff in Gegenwart von Platinoxyd u.s.w. die beiden Isomeren immer nebeneinander entstehen und zwar in einem Verhältnis, das nicht allein von der Art des in der 1-Stellung anwesenden Substituenten und von dem angewandten Reduktionsmittel, sondern auch — ANSCHÜTZ hat dies zu Unrecht ausser Betracht gelassen — von der Ausführungsweise der Reduktion (Weise des Zusammenbringens der Substanzen, Medium, Temperatur u.s.w.) abhängig ist. Anweisungen hierfür sind auch bereits in der Literatur vorhanden¹²⁾.

Prognosen über den Verlauf einer partiellen Reduktion einer Substanz vom Typus VIII sind nach unserer Ansicht nicht oder wenigstens nicht mit einiger Sicherheit möglich.

§ 3. Namentlich die 1-Alkyloxy-2-amino-4-nitrobenzene und die analogen Verbindungen, welche eine 1-Alkenyloxy-, eine 1-Aralkyloxygruppe und dergl. enthalten, sind in zweierlei Hinsicht sehr interessant. Dies ist der Grund, warum die Verbindungen dieser und ähnlicher Typen uns momentan so stark beschäftigen und weshalb wir ihre Herstellung sorgfältig untersucht und bedeutend verbessert haben.

Von VAN DER WEYDEN wurde gefunden, dass 1-Methoxy-2-amino-4-nitrobenzen und 1-Aethoxy-2-amino-4-nitrobenzen einen sehr stark süßen Geschmack besitzen, — ihre Süßkraft soll nach ihm 330, bezw. 1400 mal grösser als diejenige von Rohrzucker sein —, während 1-Methoxy-2-nitro-4-aminobenzen und 1-Aethoxy-2-nitro-4-aminobenzen geschmacklos sind. Es hat sich uns gezeigt, dass auch bei höheren Alkyloxyverbindungen dieser beiden Typen dieser merkwürdige Gegensatz festzustellen ist. So konnten wir ein nach VAN DER WEYDEN erhaltenes Gemisch der beiden *n*. Propoxyverbindungen, das von ihm als das reine 1-*n*.Propoxy-2-amino-4-nitrobenzen betrachtet wurde und dessen Süßkraft nach ihm 3300 mal grösser als diejenige von Rohrzucker war, in das äusserst süsse 1-*n*.Propoxy-2-amino-4-nitrobenzen und das geschmacklose 1-*n*.Propoxy-2-nitro-4-aminobenzen trennen.

Dieser Gegensatz zwischen diesen Isomerenpaaren ist um so auffallender, da — wie schon lange bekannt ist¹³⁾ — auch *m*. Nitranilin dulcigen ist, einen ausgesprochenen süßen Geschmack besitzt; nach VAN DER WEYDEN soll die Süßkraft dieser Substanz 40 mal grösser als diejenige des Rohrzuckers sein. Es ist eines der zahllosen Rätsel, vor welche das Studium des Zusammenhangs zwischen Konstitution und Geschmack organischer Verbindungen uns stellt, warum Einführung einer Alkyloxygruppe in das Molekül des *m*. Nitranilins je nach dem Eintrittsort einen so verschiedenen Effekt hat: in der Verbindung IX z.B. ist der süsse Geschmack des *m*. Nitranilins enorm verstärkt, in der Verbindung X nicht oder wenigstens nicht nennenswert. Auch die von uns hergestellten Verbindungen XI und XII oder andere Alkyloxy-Verbindungen von diesen Typen,

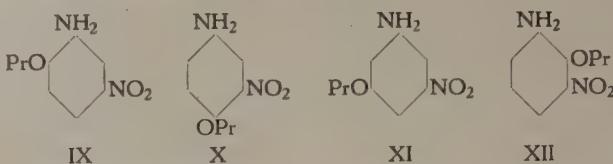
¹⁰⁾ F. KEHRMANN, Ber. **28**, 1707 (1895).

¹¹⁾ M. T. BOGERT und R. L. EVANS, Ind. Eng. Chem. **18**, 299 (1926).

¹²⁾ Vergl. z.B. D.R.P. 204.884; Frdl. **9**, 172 und L. SPIEGEL und A. UTERMANN, Ber. **39**, 2631 (1906).

¹³⁾ J. S. MUSPRATT und A. W. HOFMANN, Lieb. Ann. **57**, 218 (1846).

welche ebenfalls die Nitrogruppe und die Aminogruppe in meta-Stellung enthalten, haben wir synthetisiert und erwiesen sich als geschmacklos.



Wir sehen davon ab hier zu untersuchen, inwiefern in Bezug auf den Geschmack zwischen diesen Alkyloxy-amino-nitroverbindungen und anderen Gruppen von substituierten *m*.Nitranilinen Analogien bestehen.

Von *o*- und *p*. Nitranilin ist schon lange bekannt, dass sie geschmacklos sind. Süßschmeckende Derivate dieser Verbindungen sollen nach COHN auch nicht zu erwarten sein. Dieser Forscher hat nämlich auf Grund seiner Erfahrungen betreffs des Geschmackes einiger Derivate der drei isomeren Nitraniline die Regel aufgestellt, dass allein Derivate des *m*. Nitranilins süß schmecken können¹⁴⁾. Indessen ist unsere Kenntnis von dem Zusammenhang zwischen Konstitution und Geschmack organischer Verbindungen — es sei hier nochmals ausdrücklich betont — noch sehr gering; Ueberraschungen können hier keineswegs für ausgeschlossen gehalten werden. Wir haben es denn auch für notwendig erachtet, auch die sechs Alkyloxy-amino-nitrobenzene, in welchen die Nitrogruppe und die Aminogruppe zu einander in ortho- oder in para-Stellung stehen, in unsere Untersuchungen zu beziehen. Wir werden uns hier über diese Untersuchungen nicht verbreiten. Sie sind nahezu beendigt und werden — wir dürfen dies schon jetzt wohl sagen — nur geschmacklose Verbindungen ergeben.

Von den beiden Verbindungen XIII und XIV, welche durch partielle Reduktion von 1-n.Propoxy-2,4-dinitro-6-methylbenzen in propylalkoholischer Lösung mit Natriumdisulfid erhalten wurden, ist die eine (Schmp. 59—60°) deutlich süß und die andere (Schmp. 71—72°) geschmacklos. Es scheint uns nicht zu gewagt, hieraus zu folgern, dass die erstgenannte Verbindung die Formel XIII und die letztgenannte die Formel XIV besitzen wird; in diesem Falle ist nämlich die gegenseitige Lage der n. Propoxy-, der Amino- und der Nitrogruppe jedesmal dieselbe wie in den obenbesprochenen süßen, bzw. geschmacklosen Verbindungen (IX bzw. X), welche der Methylgruppe als Kernsubstituent entbehren.

Bei den beiden partiellen Reduktionsprodukten von 1-Alkenyloxy-2,4-dinitrobenzenen konstatierten wir denselben auffallenden Unterschied in Geschmack. So ist z.B. 1-Allyloxy-2-amino-4-nitrobenzen sehr süß, 1-Allyloxy-2-nitro-4-aminobenzen dagegen geschmacklos.

Von den bisher von uns hergestellten Substanzen hat das 1-n.Propoxy-2-amino-4-nitrobenzen, eine schön orangefarbige Krystalle bildende Substanz vom Schmp. 47.5—48.5°, weitaus die grösste Süßkraft. Die Bestimmung derselben kann naturgemäss nur auf organoleptischem Wege geschehen, nämlich durch Vergleichung des Geschmackes wässriger Lösungen bekannter Konzentration der Substanz mit demjenigen einer Standardlösung von Saccharose. Verschiedene Personen kommen erklärlicherweise bei derartigen Bestimmungen zu recht stark auseinandergehenden Resultaten; ausserdem sind diese von der Konzentration der verwendeten Standardlösung abhängig. Es ist somit unmöglich, die Süßkraft einer Substanz mit grösserer Genauigkeit anzugeben. Ohne Uebertreibung kann jedoch wohl gesagt werden, dass die Süßkraft von 1-n.Propoxy-2-amino-4-nitrobenzen 4000—5000 mal so gross ist wie diejenige der Saccharose. Zur Vergleichung diene die Tatsache, dass nach der Literatur Saccharin und Dulcin, die beiden am meisten

¹⁴⁾ G. COHN, Die organischen Geschmacksstoffe (Berlin 1914), S. 150.

benutzten synthetischen Süsstoffe, nur 200—700 mal, bezw. 70—350 mal süsser als Saccharose sein sollen. Die Süskraft von 1-n.Propoxy-2-amino-4-nitrobenzen übertrifft sogar noch erheblich diejenige von Perillaaldehyd-*anti*-aldoxime (Peryllartin); diese Substanz soll nämlich etwa 2000 mal süsser als Rohrzucker sein und ist unseres Wissens die weitaus süsseste Substanz, welche bisher in der Literatur beschrieben wurde^{15).}

Mit Bezug auf die praktische Anwendung des 1-n.Propoxy-2-amino-4-nitrobenzens — wir nennen diese Substanz hier nur als Beispiel — als Süsstoff ist es von grosser Bedeutung, dass diese Substanz sehr leicht in reinem Zustande zugänglich ist, dass sie — im Gegensatz zu Saccharin, dessen Gebrauch dadurch zuweilen behindert wird — keinen Beigeschmack oder Nachgeschmack besitzt und gegenüber kochendem Wasser oder in nicht zu stark saurem Milieu völlig stabil ist und dass sie sich bei zu diesem Zwecke angestellten Versuche als in hohem Grade ungiftig erwiesen hat. Die Löslichkeit in Wasser ist zwar gering, doch wegen der äusserst grossen Süskraft vollkommen hinreichend.

§ 4. Die zweite interessante Eigenschaft der 1-Alkyloxy-2-amino-4-nitrobenzene und analoger Verbindungen, die eine 1-Alkenyloxy-, eine 1-Aralkyloxygruppe und dergl. enthalten, worauf oben hingedeutet wurde, ist der Besitz einer lokalanästhesierenden Wirkung, naturgemäß in einem von der Art des in der 1-Stellung vorhandenen Substituenten stark abhängigen Masse. In einer Anzahl Fälle übertrifft diese Wirkung in sehr erheblichem Masse diejenige des Cocains; so ist z.B. nach unseren mit Hilfe einer wenig bekannten und später ausführlich zu behandelnden Methode angestellten Untersuchungen, die inzwischen durch von pharmakologischer Seite in der üblichen Weise ausgeführte Versuche eine vorläufige Bestätigung gefunden haben, das 1-n.Propoxy-2-amino-4-nitrobenzen etwa 30 mal wirksamer als Cocain, und diese Substanz ist nicht die wirksamste, die wir bisher kennen gelernt haben. Es scheint uns durchaus möglich, dass für diese Substanzen auf Grund dieser Eigenschaft wichtige Anwendungen gefunden werden dürften.

Hieroben wurde schon mitgeteilt, dass die Löslichkeit von Verbindungen vom Typus II in Wasser gering ist; sie sind schwache Basen und ihre Salze, auch diejenigen mit starken Mineralsäuren, sind deshalb in wässriger Lösung in weitgehendem Masse hydrolytisch gespalten. Für den Gebrauch eines Stoffes als Lokalanästhetikum sind derartige Eigenschaften selbstredend im allgemeinen wenig günstig. Bei den von uns hergestellten Substanzen von enormer Wirksamkeit sind diese Nachteile jedoch verhältnismässig gering.

Ausdrücklich sei darauf hingewiesen, dass — wie die Praxis bewiesen hat — die lokalanästhesierende Wirkung dieser Substanzen ihrem Gebrauch als Süsstoff nicht im Wege steht.

Die Entdeckung der lokalanästhesierenden Wirkung der betreffenden Substanzen hat uns zu Untersuchungen in verschiedenen Richtungen geführt. So ist es uns z.B. gelungen durch Kondensation dieser Substanzen mit Chlordialkylaminoalkanen u.s.w. zu ebenfalls lokalanästhesierend wirkenden Verbindungen zu gelangen, welche starke Basen sind und deren Salze sich deshalb ohne Hydrolyse und überdies sehr leicht in Wasser lösen. Wir hoffen hierüber später ausführliche Mitteilungen zu machen.

¹⁵⁾ S. FURAKAWA, J. Tokyo Chem. Soc. **41**, 706 (1920); C.A. **15**, 1145 (1921).

Geophysics. — *On the determination of the faultplanes in the hypocentre of the deep-focus earthquake of June 29, 1934 in the Netherlands East Indies.* By L. P. G. KONING. (Communicated by Prof. J. D. VAN DER WAALS.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

In the present paper the author will try to give a method for determining exactly the mechanism in the focus of the deep earthquake of June 29, 1934 in the Netherlands East Indies, in other words, the position in space of the faultplanes, by using the reflections of the earthquake waves.

In a previous article¹⁾ a graphic method has been given for determining the location at the surface of the earth of the zones where compression or dilatation waves arrive in the case of a certain orientation of the quadrants-system in the hypocentre. The orientation of the quadrants-system had been stated as follows: at a depth of 700 km below the surface of the earth (epicentre in $123^{\circ}.4$ E, $6^{\circ}.1$ S) a faultplane, making an angle of 55° with the surface, had been assumed. The dip of this faultplane had been determined by means of the map of BERLAGE²⁾. Thereby it had been suggested, that the movement in the focus took place along a plane more or less coinciding with the plane on which, according to BERLAGE, most of the hypocentres of the deep-focus earthquakes in the East Indian Archipelago are located. The second possible faultplane being perpendicular to this first plane. The normal plane of the two faultplanes had been chosen in such a manner that the intersection of this plane (the symmetry plane of the quadrants-system) with the earth's surface goes through the points Epicentre: $123^{\circ}.4$ E, $6^{\circ}.1$ S and P: 115° E, 5° N.

The intersection of the two faultplanes with the surface of the earth gives the boundary-curves of the dilatation and compression zones. The direction of the movement in the focus had been chosen perpendicular to the intersection of the two faultplanes or along the intersection of a faultplane and the symmetry plane of the quadrants-system (thus perpendicular to the strike of a faultplane).

In the above-mentioned publication the author pointed out that the direction of the movement in the faultplane may vary from 0° to 90° with the strike. In the following it will be investigated how reads the distribution at the surface of the earth in zones of dilatations and compressions when the direction of the movement in a faultplane includes an angle with the strike less than 90° (Fig. 1).

We write:

V = faultplane, including an angle $\alpha = 35^{\circ}$ with the earth's radius and dipping to the Asiatic Continent.

W = the second faultplane, perpendicular to V . For plane W we write $\beta = 55^{\circ}$. The intersection of the two faultplanes V and W (i.e. the strike of V and W) being perpendicular to the earth's radius through the hypocentre.

CO (or GO) = original direction of the movement in W (or V), perpendicular to the strike AB .

The direction of the movement will now be chosen along the line DO in plane W , this line making an angle of $90^{\circ} - \varphi$ with the strike AB . As it is necessary that the two faultplanes are perpendicular to each other and the movement always takes place in the

¹⁾ L. P. G. KONING, On the mechanism of deep-focus earthquakes. *Gerl. Beitr. z. Geoph.*, **58**, 159—197 (1941).

²⁾ H. P. BERLAGE, A provisional catalogue of deep-focus earthquakes in the Netherlands East Indies, 1918—1934. *Gerl. Beitr. z. Geoph.*, **50**, 7—17 (1937).

direction perpendicular to the intersection of the faultplanes, plane V must rotate on the line GO ($GO \perp W$), till V being perpendicular to DO . Plane V rotates an angle φ .

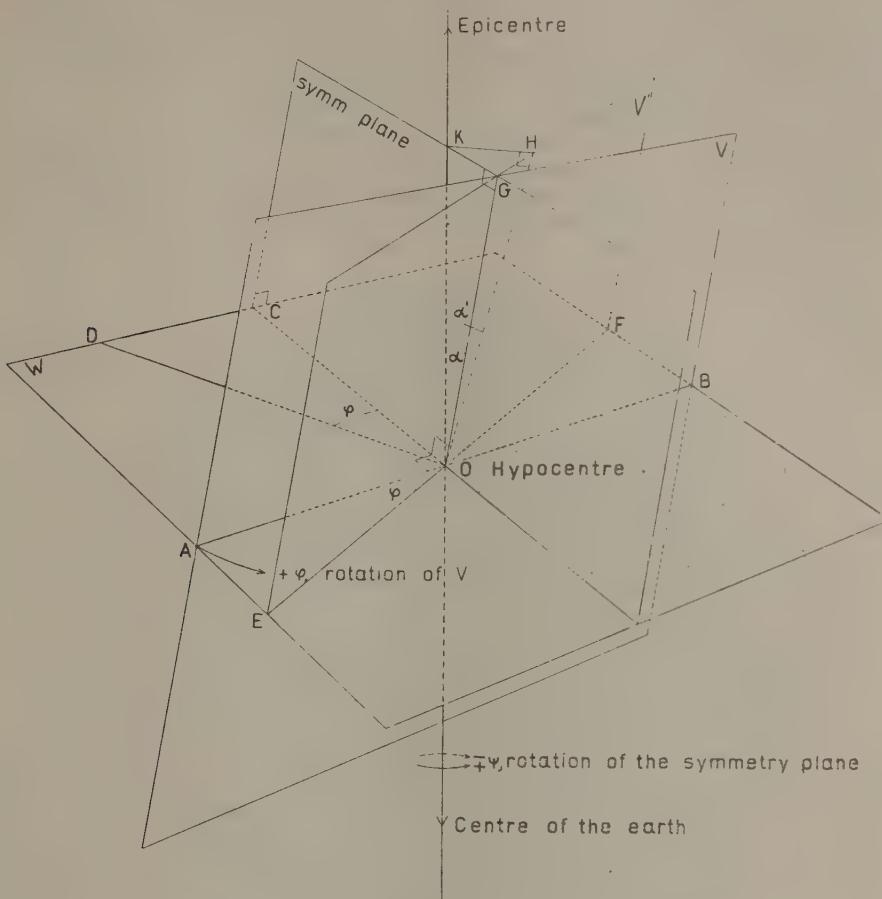


Fig. 1.

The intersection of the two faultplanes V' and W is now EF , while the direction of the movement (DO) is perpendicular to EF . Plane V' makes now an angle of α' with the earth's radius. During the rotation of V on the line GO , the second plane W had been held constant. In the other case, when V remains constant W must rotate on the line CO .

For the determination of the location of the boundary-curves of the dilatation and compression zones at the surface of the earth the stereographic projection method had been used. The following method of proceeding was followed.

1. Construction of the boundary-curves for the case that the epicentre coincides with the projection centre of the stereographic plat, while the equator of this figure coincides with the symmetry plane of the quadrants-system³⁾.

2. Construction of the real symmetry plane, going through the points $E: 123^{\circ}.4$ E, $6^{\circ}.1$ S and $P: 115^{\circ}$ E, 5° N. The position of this symmetry plane in the projection figure is deduced from the equator plane as follows:

a. rotation of the projection figure on the centre E_1 (90° E, 0° N) about an angle of 50° .

³⁾ L. P. G. KONING, op. cit. p. 191, Fig. 8.

b. rotation of the circle plane AE_1B on an angle of 23° about the line AB . The great circle $AQPEB$ represents the real symmetry plane passing through the points E and P .

3. Transformation of the constructed boundary-curves (sub 1) to the real epicentre E .

a. rotation of all the points of the constructed boundary-curves (sub 1) on the line CD about an angle of 26° . The projection figure must therefore be rotated on the stereographic plat till the line AE_1B coincides with the equator. Each point of the boundary-curves now moves along a parallel of latitude about an angle of 26° .

b. rotation of all the points of the now obtained curves (sub 3a) on the line AE_1B about an angle of 23° . The projection figure must therefore be rotated on the stereographic plat till the line AE_1B coincides with the line NE_1S . Each point of the curves now moves along a parallel of latitude about an angle of 23° (Fig. 2). In Fig. 9⁴) each point has inadvertently been moved along a meridian.

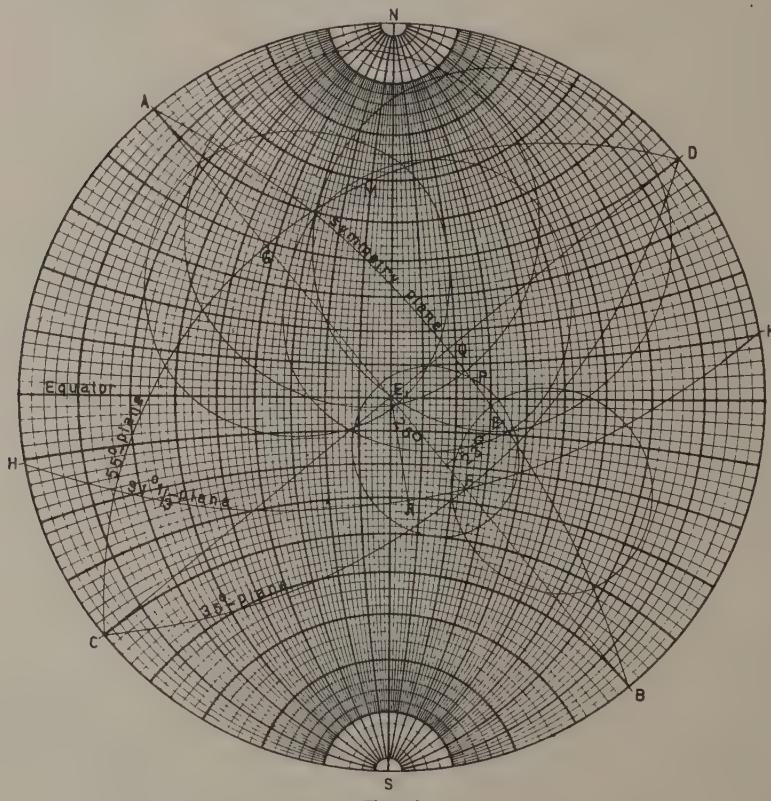


Fig. 2.

Stereographic projection of some of the boundary-curves.

AGE_1FB = symmetry plane for the original curves $I-a'$ and $I-b'$ with E_1 as epicentre.
 $AQPEB$ = real symmetry plane for the curves $I-a$ and $I-b$ with E as epicentre.
 E_1F = $\alpha = 35^\circ$, $CFD = 35^\circ$ -plane, $E_1G = \beta = 55^\circ$, $CGD = 55^\circ$ -plane.
 E_1R = $31^\circ 1/3$, $HRFK = 31^\circ 1/3$ -plane, this plane being obtained after rotation of plane CFD on the angle $\varphi = 25^\circ$ (arc GM , G = pole of 35° -plane and M = pole of $31^\circ 1/3$ -plane); curve $III-a'$ is the corresponding curve to the $31^\circ 1/3$ -plane. After transformation curve $III-a$ is the result.

For the construction of the boundary-curves by means of the stereographic plat, Table

⁴) L. P. G. KONING, op. cit. p. 193.

VIII, d⁵) has been used. This table could be improved by constructing and reading on a larger scale (Table I).

TABLE I.

i_{700}	Δ_1	Δ_2	i_{700}	Δ_1	Δ_2
25°		2.7	90°	15.0	15.0
28 30'	93.0	2.9	95	13.0	17.5
30	89.0	3.1	100	11.5	21.0
35	78.0	3.5	105	10.0	24.5
40	69.0	4.0	110	8.6	28.5
45	61.5	4.5	115	7.5	33.5
50	53.3	5.0	120	6.7	38.5
55	46.0	5.8	125	5.8	46.0
60	38.5	6.7	130	5.0	53.3
65	33.5	7.5	135	4.5	61.5
70	28.5	8.6	140	4.0	69.0
75	24.5	10.0	145	3.5	78.0
80	21.0	11.5	150	3.1	89.0
85	17.5	13.0	151 30'	2.9	93.0
			155	2.7	

In order to use the character of the reflected waves (Table II) the coordinates of the first reflection points of the reflected waves at the surface of the earth have been determined.

TABLE II.

Station	Δ	P	pP	PP	pPP	PPP	Abbr. on map	Nr.
Batavia	16.5°	e+					Ba	
Manila	20.6	+					Ma	
Riverview	38.2	+					Ri	
Kobe	42.2	+					Kob	
Kodaikanal	48.4	e+	—				Kod	1 ?
Bombay	56.0	+	+				Bo	2
Helwan	94.9	—			+		He	2
Pulkovo	96.7	—	—	+			Pu	3, 4
Königsberg	103.0	—		+			Kö	5
Zagreb	106.9	—	—				Za	6
Kopenhagen	107.0	—					Kop	
Hamburg	108.5	—					Ha	
Göttingen	109 6	—			e—		Gö	7 ?
Neuchatel	112.7	—		+			Ne	8
Uccle	113.1	—		+	—		Uc	9, 10
Kew	115.1	—			e+		Ke	11 ?
Granada	122.6	—				+	Gr	12
St. Louis	135.1	—		e+			Lo	13 ?

e = uncertain

+ = compression

— = dilatation.

It has been assumed that the character of the direct earthquake waves arriving in the first reflection points will be the same as those of the reflected waves arriving in the

⁵) L. P. G. KONING, op. cit. p. 181.

stations. The coordinates have been determined as follows. Through the epicentre E and a station S (Fig. 3) a great circle has been constructed on the stereographic plat. In

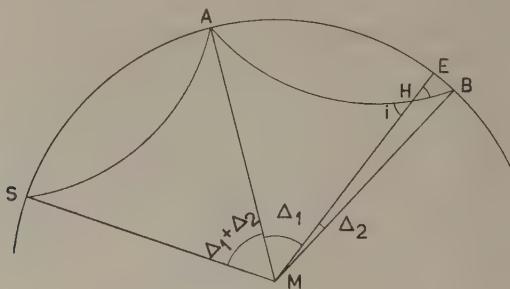


Fig. 3.

the plane of this great circle the reflected earthquake wave propagates. Table I gives for a certain value of i two values of Δ (Δ_1 and Δ_2). From Fig. 3 it appears that the epicentral distance of a station amounts to $\Delta_s = 2\Delta_1 + \Delta_2$. As Δ_s is known, Δ_1 and Δ_2 may be computed with this equation and Table I. The value of Δ_1 must be plotted from the epicentre along the great circle through E and S on the stereographic figure, after which the coordinates of the reflection point A may be read. The coordinates of the first reflection points obtained in this manner have been drawn in the map of the world (map I). The figures refer to Table II.

We will now distinguish the following possibilities:

- I. V and W remain constant, the direction of the movement coincides with CO (or GO), Fig. 1.
- II. W remains constant, V turns, the direction of the movement varies in W.
- III. V remains constant, W turns, the direction of the movement varies in V.

I. The intersection of V and W is perpendicular to the earth's radius through the focus. V makes an angle of $\alpha = 35^\circ$ with the radius and the symmetry plane of the quadrants-system goes through the points E and P. Plane V inclines to the Asiatic Continent. After construction of the boundary-curves in the map of the world it appears that the seismic data satisfy to this orientation of the quadrants-system. As several uncertain data have been used not too great a value may be set upon the conclusions in the following pages. The uncertainty of the data is partly due to unaccurate or impossible interpretation of the seismograms, partly due to indistinctnesses in the reproductions of the seismograms used. The curves drawn in the map of the world have been numbered in Roman figures, whereby the Asiatic curves have been marked by the letter a and the Australian curves by the letter b (see curves I-a and I-b).

II. The direction of the movement varies in plane W, whilst plane V turns on the line GO (Fig. 1). Curve I-b is constant. The rotation of plane V may be positive or negative (positive: against the movement of the hands of a clock looking along the axis of rotation in the direction of the hypocentre).

a. Positive rotation of V. The extreme position curve I-a may reach is given by curve II-a. Kobe registered a compression and must lie within curve II-a. The amount of the rotation is $\varphi = 10^\circ$, the dip being $\alpha' = 34^\circ 1/3$.

b. Negative rotation of V. The extreme position curve I-a may attain is given by curve III-a. Bombay recorded a compression and must lie within this curve. The amount of the rotation is $\varphi = 25^\circ$, the dip being $\alpha' = 31^\circ 1/3$ (Fig. 2).

III. The direction of the movement varies in plane V, while plane W turns on the line CO (Fig. 1). Curve I-a is now constant.

a. Positive rotation of W. The extreme position curve I-b may attain is given by

curve IV-*b*. Riverview registered a compression and must lie within this curve. The amount of the rotation is $\varphi = 25^\circ$ and the dip $\beta = 48^\circ$. The amount of the rotation φ cannot be larger as the first reflection point nr. 10 of the pPP-wave, recorded in Uccle, must lie in a dilatation zone. For a larger angle of rotation the reflection point falls in a compression zone.

b. Negative rotation of W. This is not to be allowed because for a very small negative rotation of W the reflection point nr. 2 of the pP-wave, recorded in Bombay, falls in a dilatation zone, while in this point a compression wave arrives.

Prof. Dr. F. A. VENING MEINESZ suggested, also to investigate how far a rotation of the symmetry plane and variation of the dip of the faultplanes, eventually combined with a rotation of V or W may be allowed.

Let us first examine the influence of a variation of the dip. The original dip amounts for V to $\alpha = 35^\circ$. The quadrants-system may now turn on the intersection of the two faultplanes whereby the symmetry plane remains constant. From map I it appears, the planes V and W remaining constant, that a variation of α is only possible between 34° — 36° . When α varies the curves I-*a* and I-*b* will move. The reflection point nr. 2, where a compression wave arrives, falls in a dilatation zone when α decreases, while the reflection point nr. 10, where a dilatation wave arrives, will fall in a compression zone when α increases.

When the variation of the dip is combined with a rotation of a faultplane, more solutions are possible. We assume in the following pages a variation of the dip of the faultplanes of 5° (for plane V: $\alpha = 30^\circ$ and for W: $\beta = 60^\circ$). Now it is necessary that W turns. The amount of the positive rotation lies between $\varphi = 12\frac{1}{2}^\circ$ — 45° , whereby the values $\varphi = 12\frac{1}{2}^\circ$ and $\varphi = 45^\circ$ correspond to extreme positions of the boundary-curves VI-*b* and VII-*b*, in connection with the location of the reflection points nr. 2 and 10 and the location of the stations Manila and Kobe.

Let us now examine the possibilities when the symmetry plane of the original quadrants-system turns. The axis of rotation is the earth's radius through the focus (Fig. 1).

I. Positive rotation of the symmetry plane.

a. It appears for V being constant and $\alpha = 35^\circ$, that the extreme value of the angle of rotation amounts to $\psi = 12^\circ$. In this case Kobe, recording a compression wave, remains in a compression zone (curve VIII-*a*). Plane W now may turn a positive angle of $\varphi = 0^\circ$ — 30° , so that Riverview and Manila remain in a compression zone (curves VIII-*b* and IX-*b*).

b. When on the other hand W is constant, with $\beta = 55^\circ$ and $\psi = 12^\circ$, plane V may rotate about an negative angle of $\varphi = 0^\circ$ — 30° (curves VIII-*a* and X-*a*). When the angle of rotation $\varphi > 12^\circ$ it is necessary that V rotates so that Kobe remains in a compression zone. It appears that the maximum value of φ is 35° . Curve XI-*b* is then the extreme curve, while plane V must rotate about a negative angle of $\varphi = 25^\circ$ (curve XII-*a*). A larger angle of rotation φ is not desirable as the boundary-curve XII-*a* will intersect or touch the 93° -curve. This 93° -curve is the locus of all the points at the surface of the earth where earthquake waves arrive touching the earth's core. The epicentral distance of all these points amounts to 93° . When the 93° -curve intersects or touches the boundary-curve XII-*a* the amplitudes of the earthquake waves in European stations must be very small or even zero. It is also possible that in some stations diffracted earthquake waves will be recorded showing a compressional character. Curve XII-*a* passes the 93° -curve at a distance of some degrees. The same holds for curve X-*a*.

II. Negative rotation of the symmetry plane. This rotation is not to be allowed when the dip of V amounts to $\alpha = 35^\circ$ (or for W to $\beta = 55^\circ$). Rotating W on the line CO (Fig. 1) the compression point nr. 2 will fall in a dilatation zone, or the dilatation point nr. 10 in a compression zone. A negative rotation may be allowed when $\alpha < 35^\circ$. It appears that the variation of the dip of V amounts to about 5° ($\alpha = 35^\circ$ — 30°). Is

$\alpha > 35^\circ$ the dilatational reflection point nr. 10 falls in a compression zone and for $\alpha < 30^\circ$ the compression station Riverview falls in a dilatational zone. The maximum amount of the negative rotation of the symmetry plane is $\psi = 34^\circ$, V dipping under an angle of $\alpha = 30^\circ$ and W having to rotate about a positive angle of $\varphi = 20^\circ$ (curves XIII-a and XIII-b). A further rotation of W is not desirable as curve XIII-a will pass the 93° -curve in that case too close. The several possibilities of the positions of the faultplanes deduced in this paper have been represented graphically in Fig. 4.

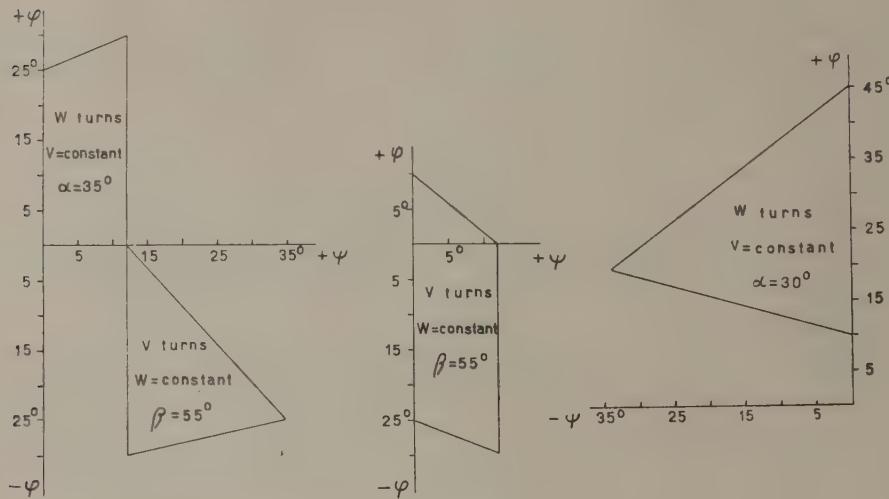
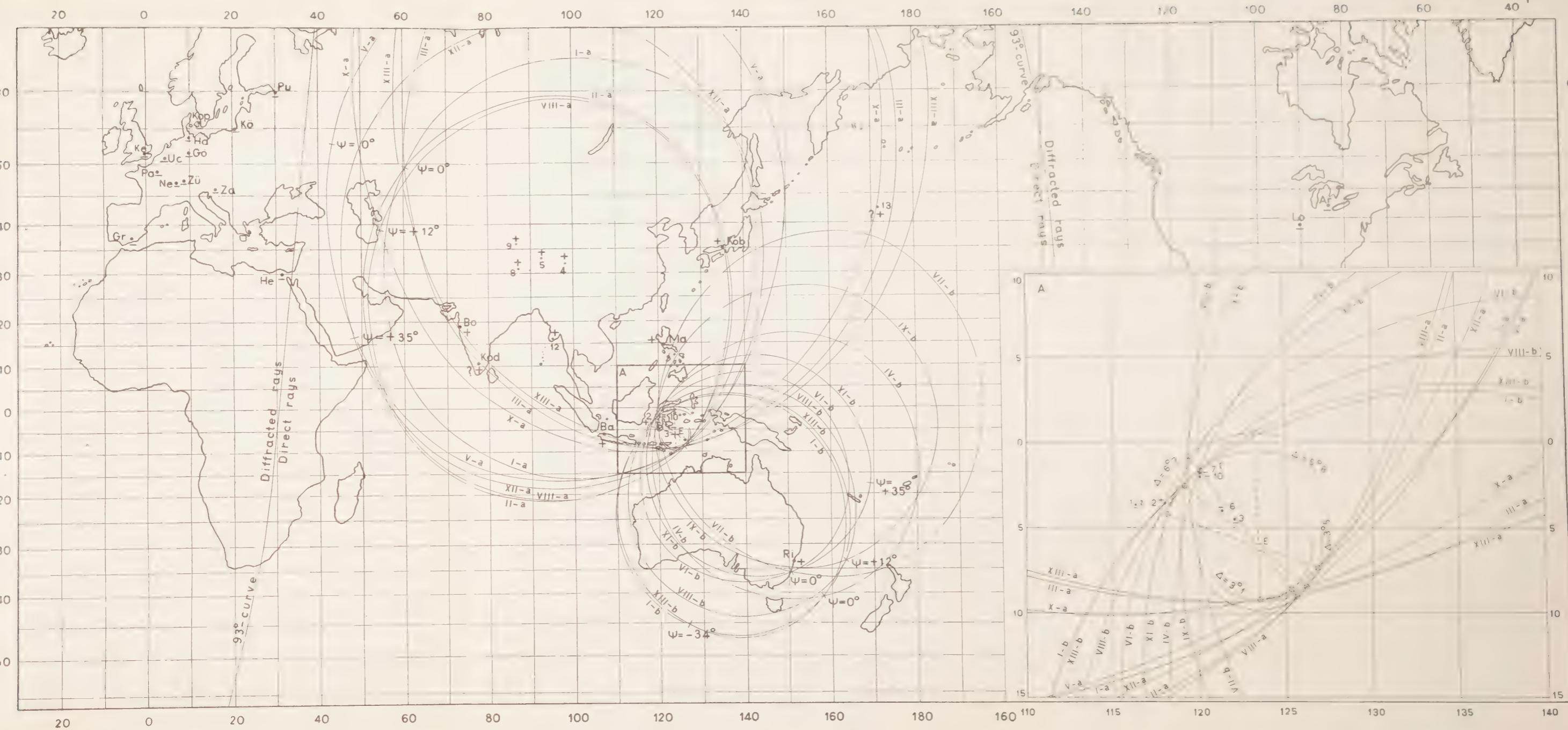


Fig. 4.

The course of the boundary-curves at the surface of the earth could be examined when the variation of the dip and a positive rotation of the symmetry plane is assumed, combined with a rotation of V or W. In the preceding pages it appeared that with a negative rotation of the symmetry plane the dip α could vary between 35° — 30° . After a contemplation of map I it will be clear that the possibility of the variation of the dip with a positive rotation of the symmetry plane is also slight. Finally the course of the boundary-curves could be examined when the two planes V and W rotate together, thereby remaining perpendicular to each other. As for the determination of the boundary-curves the number of data have been too small and some of the data even uncertain, while the graphical method has an accuracy of about $1/4^\circ$, not too great a value may be set upon the above-mentioned conclusions. The author had only the intention to give a method for determining the boundary-curves at the surface of the earth when variations occur in the position of the quadrants-system, so that all the possibilities mentioned above have not been elaborated. When in future more data will be obtained and a conscientious reading of the amount of the amplitudes will be possible, then a more accurate determination of the position of the quadrants-system may be given.

In conclusion the author wishes to express his gratitude to Prof. Dr. F. A. VENING MEINESZ for his valuable suggestions and to Prof. Dr. J. D. VAN DER WAALS for his continued interest during the preparation of the present paper.



Mathematical Physics. — *Sur l'intégration de quelques problèmes aux limites régis par l'équation de FOURIER dite „de la chaleur” au moyen de la méthode des transformations fonctionnelles simultanées.* Par S. R. DE GROOT. (Soixante-dix-neuvième publication du Fonds VAN DER WAALS, VAN DER WAALS-Laboratorium der Gemeente Universiteit, Amsterdam.) (Communicated by Prof. J. D. VAN DER WAALS JR.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

Sommaire. Quelques problèmes aux limites sur la propagation de la chaleur dans un fil ont été intégrés au moyen de la méthode des transformations fonctionnelles. Si l'on applique une transformation de FOURIER par rapport à la variable qui désigne l'abscisse et en même temps une transformation de LAPLACE à la variable du temps, la solution peut être fournie après un calcul très simple. Il est essentiel de choisir la transformation qui est adaptée aux intervalles des variables et aux conditions aux frontières.

I. Conditions aux limites de première espèce.

§ 1. La transformation fonctionnelle.

On sait que la transformation de LAPLACE donne une justification rigoureuse de la méthode opératoire de HEAVISIDE (calcul symbolique) dans les cas où cette méthode est légitime. D'autre part la théorie de la transformation de LAPLACE montre clairement les cas où il n'est pas permis d'appliquer le calcul symbolique. En outre, on peut aborder avec la transformation de LAPLACE des problèmes plus étendus qu'avec le calcul symbolique et la méthode ne le cède en rien à la méthode opératoire quant à la rapidité et la simplicité du calcul. Ces faits ont été soulignés par un grand nombre d'auteurs¹).

Appliquée à une équation différentielle ordinaire, la transformation de LAPLACE par rapport à la variable indépendante, la réduit en une équation algébrique, dans laquelle un paramètre a remplacé la variable indépendante. Considérons maintenant le cas des équations aux dérivées partielles. Nous ne nous occuperons ici que des équations du second ordre à deux variables qui sont linéaires par rapport aux dérivées partielles du second ordre. Prenons par exemple l'équation du type parabolique qui décrit la propagation de la chaleur dans un milieu conducteur homogène et à une dimension (problème de la barre). La température U dépend de la coordonnée x et du temps t . G. DOETSCH¹) a étudié quelques types de ce problème. Il a appliqué une transformation fonctionnelle par rapport à une des variables indépendantes. L'équation est alors ramenée à une équation différentielle ordinaire, dans laquelle une des deux classes de conditions aux frontières (condition initiale et conditions aux limites) a été introduite d'une manière naturelle. Un paramètre y joue le rôle de la variable par rapport à laquelle on a effectué la transformation. Le problème de l'équation différentielle ordinaire, qu'il reste à intégrer, n'est pas toujours très simple.

Il semble plus avantageux de transformer l'équation aux dérivées partielles par rapport aux deux variables indépendantes à la fois. Cette dernière méthode s'applique d'une façon particulièrement simple à l'équation de FOURIER puisque les coefficients sont constants. Toutes les conditions aux frontières sont introduites dans l'équation transformée, qui est de caractère algébrique et qui contient deux paramètres remplaçant les variables.

Il est essentiel de choisir la transformation adéquate, c'est à dire celle qui est la mieux adaptée au domaine de la variable par rapport à laquelle on transforme. Mais nous voulons insister sur le fait que l'on doit prendre des transformations spéciales, adaptées aux conditions aux limites pour éviter des complications. Les avantages d'un choix parti-

culier seront montrés dans les exemples traités dans cette note. Grâce à ce choix on peut intégrer d'une manière extrêmement rapide et simple quelques problèmes aux limites qui se rattachent à la théorie de la chaleur avec conditions aux limites de différentes espèces.

A propos des questions d'existence et d'unicité des solutions, ainsi que des conditions qui doivent être remplies pour appliquer la méthode des transformations fonctionnelles, nous renvoyons aux études approfondies de G. DOETSCH déjà citées.

§ 2. Problèmes aux limites de la théorie de la chaleur.

L'équation de FOURIER se présente dans plusieurs branches de la Physique mathématique. Nous voulons nous conformer à l'usage traditionnel du langage emprunté à la théorie de la chaleur. La température $U(x, t)$ dans un fil satisfait à l'équation:

$$a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}, \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

où x désigne l'abscisse et t le temps. On appelle a le „coefficent d'égalisation de température”. Il est égal à $\frac{\lambda}{c_p \varrho}$, où λ est la conductibilité thermique, c_p la chaleur spécifique à pression constante et ϱ la densité du matériel en question. Il s'agit de trouver une solution qui répond à certaines conditions à la frontière. Pour un fil fini de longueur l , le domaine fondamental des variables est la demi-bande $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$. Nous admettrons dans la suite que le fil a une température initiale $K(x)$, tandis qu'aux extrémités $x=0$ et $x=l$ la fonction U où $\frac{\partial U}{\partial x}$ sera donnée. Il s'agit ici de ce que DOETSCH a appelé le „problème général” puisqu'il se peut que les valeurs données sur la frontière ne soient pas continues. La fonction U où $\frac{\partial U}{\partial x}$ ne converge vers les valeurs données sur la frontière que si l'on s'approche de la frontière le long d'un chemin qui y aboutit perpendiculairement (raccord à une dimension seulement). Nous envisagerons aussi quelques problèmes relatifs à un fil tendant vers l'infini d'un côté ou des deux.

Nous voulons ramener les problèmes à leur forme la plus simple en choisissant des variables sans „dimension”. C'est à dire que pour un fil fini une analyse dimensionnelle montre qu'il y a intérêt à transcrire les équations en introduisant les variables x pour $\frac{x}{l}$ et t pour $\frac{at}{l^2}$ (le „nombre de FOURIER”). Cela étant, le domaine fondamental est devenu la demi-bande $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ et on a supprimé le coefficient a dans l'équation (1). Pour les problèmes des barres infinies il ne s'impose pas d'unité de longueur naturelle, mais on peut également ramener, par un choix convenable d'unités, l'équation à la forme simple susdite.

§ 3. Le conducteur fini avec les valeurs de la température données sur les trois parties de la frontière.

Envisageons d'abord le problème suivant:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}, \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} U(x, t) = K(x), \dots \dots \dots \dots \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x, t) = A_0(t), \dots \dots \dots \dots \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} U(x, t) = A_1(t), \dots \dots \dots \dots \quad (5)$$

où l'on doit écrire \lim parce qu'il s'agit d'un „problème général” (voir le paragraphe précédent). Comme le domaine de t est infini, une transformation de LAPLACE par rapport à cette variable s'impose. Nous l'indiquerons par \mathfrak{L}_t (l'indice indique la variable par rapport à laquelle on transforme). La transformation est définie par

$$\mathfrak{L}_t U(x, t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} U(x, t) dt \quad \dots \quad (6)$$

et sa propriété fondamentale (théorème de différentiation du premier ordre) est

$$\mathfrak{L}_t \frac{\partial U}{\partial t} = p \mathfrak{L}_t U(x, t) - K(x). \quad \dots \quad (7)$$

On doit choisir une transformation de FOURIER pour transformer l'équation par rapport à la variable x , dont l'intervalle est fini. La transformation de FOURIER, qui est adaptée aux conditions aux limites est

$$\mathfrak{F}_x U(x, t) = 2 \int_0^1 U(x, t) \sin n\pi x dx, \quad \dots \quad (8)$$

provenant de la série des sinus:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\mathfrak{F}_x U(x, t)] \sin n\pi x. \quad \dots \quad (9)$$

J'ai choisi cette transformation spéciale parce que le „théorème de différentiation” du second ordre contient les valeurs de U aux limites et non pas celles de $\frac{\partial U}{\partial x}$:

$$\mathfrak{F}_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -n^2 \pi^2 \mathfrak{F}_x U(x, t) + 2\pi n [A_0(t) - (-1)^n A_1(t)]. \quad \dots \quad (10)$$

On peut écrire à l'aide des théorèmes de différentiation l'équation transformée et il est même superflu de diviser le problème en deux autres avec des températures nulles, soit au commencement, soit aux limites, comme le font les manuels classiques.

$$\begin{aligned} -n^2 \pi^2 \mathfrak{F}_x U(x, t) + 2\pi n [\mathfrak{F}_t A_0(t) - (-1)^n \mathfrak{F}_t A_1(t)] &= \\ &= p \mathfrak{F}_t U(x, t) - \mathfrak{F}_x K(x). \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (11)$$

(11) est une équation algébrique en $\mathfrak{F}_x U$, où les paramètres n et p sont venus respectivement à la place des variables x et t . Toutes les conditions aux frontières y sont comprises d'une manière tout à fait naturelle. Il vient pour la solution transformée:

$$\mathfrak{F}_t \mathfrak{F}_x U(x, t) = \frac{2\pi n [\mathfrak{F}_t A_0(t) - (-1)^n \mathfrak{F}_t A_1(t)] + \mathfrak{F}_x K(x)}{p + n^2 \pi^2}, \quad \dots \quad (12)$$

d'où en effectuant la transformation de LAPLACE inverse *):

*) Utilisant la propriété: $\mathfrak{L}_t e^{\alpha t} = \frac{1}{p - \alpha}$. $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (13)$

$$\mathfrak{F}_x U(x, t) = 2\pi n e^{-n^2\pi^2 t} * [A_0(t) - (-1)^n A_1(t)] + e^{-n^2\pi^2 t} \mathfrak{F}_x K(x), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_x U(x, t) = & 2\pi n e^{-n^2\pi^2 t} * [A_0(t) - (-1)^n A_1(t)] + \\ & + e^{-n^2\pi^2 t} \int_0^1 K(\xi) \sin n\pi \xi d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Nous avons employé le théorème de BOREL:

$$\mathfrak{L}_t f(t) \cdot \mathfrak{L}_t g(t) = \mathfrak{L}_t [f(t) * g(t)], \quad (16)$$

où le signe $*$, proposé par PAUL LÉVY, désigne un „produit de composition”:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = g(t) * f(t). \quad (17, 18)$$

Si l'on détermine encore l'inverse de la transformation de FOURIER, la solution du problème est trouvée:

$$\begin{aligned} U(x, t) = & 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2\pi^2 t} * [A_0(t) - (-1)^n A_1(t)] \sin n\pi x + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t} \int_0^1 K(\xi) \sin n\pi x \sin n\pi \xi d\xi, \end{aligned} \quad (19)$$

ce qui peut s'écrire aussi avec les fonctions ϑ_3 :

$$\begin{aligned} U(x, t) = & -\frac{\partial \vartheta_3(\frac{1}{2}x, t)}{\partial x} * A_0(t) + \frac{\partial \vartheta_3(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x, t)}{\partial x} * A_1(t) + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\vartheta_3\left(\frac{x-\xi}{2}, t\right) - \vartheta_3\left(\frac{x+\xi}{2}, t\right) \right] K(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (20)$$

Dans les deux premiers termes on trouve des dérivées de la fonction ϑ_3 à cause du facteur n dans (19), provenant du second terme du second membre du théorème de différentiation (10). On pourrait trouver le dernier terme en utilisant un théorème de composition pour la transformation de FOURIER, mais la méthode suivie est plus directe.

§ 4. Conducteur infini d'un côté avec températures données sur la frontière.

Ce problème se formule de la manière suivante:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \dots \quad (21)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} U(x, t) = K(x), \quad \dots \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x, t) = A(t). \quad \dots \quad (23)$$

Le domaine des variables est $x \geq 0, t \geq 0$. Nous effectuons une transformation de LAPLACE par rapport à la variable t et une transformation de FOURIER par rapport

à x . Comme le domaine de x est infini et comme il nous faut un théorème de différentiation, qui contient la valeur de U et non pas celle de $\frac{\partial U}{\partial x}$ à l'extrémité, nous choisissons:

$$\mathfrak{F}_x U(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty U(\xi, t) \sin \lambda \xi d\xi, \dots \dots \dots \quad (24)$$

dont l'inverse est l'intégrale de FOURIER:

$$U(x, t) = \int_0^\infty [\mathfrak{F}_x U(x, t)] \sin \lambda x d\lambda. \dots \dots \dots \quad (25)$$

Il faut se rendre compte du fait que le symbole \mathfrak{F}_x a une signification différente dans tous les paragraphes. Nous donnons chaque fois une définition nouvelle.

Le théorème de différentiation du second ordre est:

$$\mathfrak{F}_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\lambda^2 \mathfrak{F}_x U + \frac{2\lambda}{\pi} A(t), \dots \dots \dots \quad (26)$$

si l'on admet qu'à l'infini U et $\frac{\partial U}{\partial x}$ s'annulent. Le problème se transforme en une équation algébrique pour $\mathfrak{F}_x U$ dépendant des paramètres p et λ :

$$-\lambda^2 \mathfrak{F}_x U(x, t) + \frac{2\lambda}{\pi} \mathfrak{F}_t A(t) = p \mathfrak{F}_x U(x, t) - \mathfrak{F}_x K(x), \dots \quad (27)$$

$$\mathfrak{F}_x U(x, t) = \frac{\frac{2\lambda}{\pi} \mathfrak{F}_t A(t) - \lambda^2 \mathfrak{F}_x K(x)}{p + \lambda^2}, \dots \dots \dots \quad (28)$$

d'où, en déterminant inversement l'original de la transformation de LAPLACE:

$$\mathfrak{F}_x U(x, t) = \frac{2\lambda}{\pi} e^{-\lambda x t} * A(t) + e^{-\lambda x t} \mathfrak{F}_x K(x), \dots \dots \dots \quad (29)$$

$$\mathfrak{F}_x U(x, t) = \frac{2\lambda}{\pi} e^{-\lambda x t} * A(t) + \frac{2}{\pi} e^{-\lambda x t} \int_0^\infty K(\xi) \sin \lambda \xi d\xi, \dots \quad (30)$$

et pour l'original de la transformation de FOURIER:

$$U(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x t} * A(t) \sin \lambda x d\lambda + \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (31)$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda x t} \sin \lambda x d\lambda \int_0^\infty K(\xi) \sin \lambda \xi d\xi, \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots \dots \dots$$

qu'on peut écrire aussi:

$$U(x, t) = \psi(x, t) * A(t) + \frac{1}{2} \int_0^\infty [\chi(x - \xi, t) - \chi(x + \xi, t)] K(\xi) d\xi \quad (32)$$

avec les „fonctions de propagation de la chaleur“ de FOURIER:

$$\chi(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} \quad \text{et} \quad \psi(x, t) = -\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{t^{\frac{1}{2}}}. \quad \dots \quad (33)$$

§ 5. *Le conducteur infini des deux côtes à température initiale donnée.*

Cherchons la solution satisfaisant à:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \dots \quad (34)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} U(x, t) = K(x). \quad \dots \quad (35)$$

Le domaine des variables est le demi-plan $t \geq 0$. Effectuons encore la transformation de LAPLACE par rapport à t et choisissons pour la transformation par rapport à x l'inverse de l'intégrale générale de FOURIER:

$$\mathfrak{F}_x U(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, t) e^{-i\lambda\xi} d\xi, \quad \dots \quad (36)$$

qui provient de l'intégrale:

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathfrak{F}_x U(x, t)] e^{i\lambda x} dx. \quad \dots \quad (37)$$

Le théorème de différentiation devient, si l'on admet qu'à l'infini U et $\frac{\partial U}{\partial x}$ s'annulent:

$$\mathfrak{F}_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\lambda^2 \mathfrak{F}_x U. \quad \dots \quad (38)$$

Alors le problème transformé est devenu:

$$-\lambda^2 \mathfrak{F}_x U = p \mathfrak{F}_t \mathfrak{F}_x U - \mathfrak{F}_x K(x), \quad \dots \quad (39)$$

$$\mathfrak{F}_t \mathfrak{F}_x U = \frac{\mathfrak{F}_x K(x)}{p + \lambda^2}. \quad \dots \quad (40)$$

On en déduit la transformée de FOURIER:

$$\mathfrak{F}_x U(x, t) = e^{-\lambda^2 t} \mathfrak{F}_x K(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\lambda^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi. \quad \dots \quad (41)$$

La fonction originale, satisfaisant aux conditions imposées, est ici:

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi, \quad \dots \quad (42)$$

$$U(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) \cos \lambda(x-\xi) d\xi. \quad \dots \quad (43)$$

Il vient, utilisant la notation de FOURIER (33):

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x - \xi, t) K(\xi) d\xi. \dots \dots \dots \quad (44)$$

Nous voulons, dans une note ultérieure, examiner quelques problèmes avec des conditions aux limites de deuxième et troisième espèce.

BIBLIOGRAPHIE.

- 1) G. DOETSCH, Theorie und Anwendung der LAPLACE-Transformation, Berlin, 1937.
Voir aussi les articles cités dans ce livre.
G. DOETSCH, L'Enseign. math., **35**, 43 (1936).
- BALTH. VAN DER POL, Phil. Mag., **7**, 1153 (1929); **8**, 861 (1929); Tijdschrift Ned. Radio-genootsch., **7**, 18 (1935); El. Nachr.-Techn., **11**, 233 (1934).
- BALTH. VAN DER POL et K. F. NIESSEN, Phil. Mag., **11**, 368 (1931); **13**, 537 (1932);
Physica **1**, 521 (1934). Le „calcul simultané“ de ces auteurs correspond
à une double transformation de LAPLACE, c'est à dire une transformation
 $\mathfrak{L}_x \mathfrak{L}_y f(x, y)$, de la fonction $f(x, y)$.
- K. F. NIESSEN, Phil. Mag., **20**, 977 (1935).
- P. HUMBERT, Le calcul symbolique, Actualités Scientifiques et Industrielles **147**, Paris,
1934.
- K. W. WAGNER, Operatorenrechnung, Leipzig, 1940. (beaucoup de citations).

Applied Mechanics. — *On the buckling and the lateral rigidity of helical compression springs. II.* By J. A. HARINGX. (Natuurkundig Laboratorium der N.V. PHILIPS' Gloeilampenfabrieken Eindhoven — Holland.) (Communicated by Prof. C. B. BIEZENO.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

5. *The buckling of a helical spring under combined compression and torsion.*

If the free ends of the spring are loaded simultaneously by an axial force P and a torque W , certain combinations of P and W , lead to instability of the spring. The same statement holds if the spring is subjected to other end-conditions, but then, in general, bending moments and shearing forces will additionally occur at these ends. In either of these cases again the spring is replaced by a rod of suitable elasticity and to *every* cross section of this rod a system of coordinate axes is attached, the Y - and Z -axis of which coincide with the principal axes of the section and the X -axis of which consequently is normal to this section. Such a coordinate system (apart from its translations) rotates if the rod buckles, but it must be taken in mind, that in the deformed state of the rod the X -axis does not coincide with the tangent to its central line, the angle between these two directions being produced by the shear-effect.

If a coordinate system (S) moves along the deformed central line of the rod, such that it permanently coincides with one of the just defined coordinate systems, its *rotation* will depend only upon that part of the local deformation of the rod, which is caused by the local bending and torsion moments M_x , M_y and M_z . Therefore the components ω , k_1 and k_2 of this rotation $\bar{\sigma}$ with respect to the momentary x -, y - and z -directions are represented by

$$\omega = \frac{M_x}{\delta} \quad k_1 = \frac{M_y}{a} \quad k_2 = \frac{M_z}{a}. \quad \dots \quad (23)$$

On the usual assumption that only quantities of the first order are to be regarded ω represents the (constant!) angle of torsion of the rod per unit of length and M_x the torque W .

Introducing a unit vector \bar{e} parallel to the axis of the undeflected rod its components x , y , z with respect to the system S obviously depend on the distance t which the centre of S has traversed along the bent central line of the rod. From a kinematical point of view it is seen at once, that

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = [\bar{e}, \bar{\sigma}].$$

so that

$$\frac{dx}{dt} = y k_2 - z k_1 \quad \frac{dy}{dt} = z \omega - x k_2 \quad \frac{dz}{dt} = x k_1 - y \omega. \quad \dots \quad (24)$$

The shearing force Q in any cross section of the rod is due to \bar{P} , having the direction of \bar{e} and therefore giving rise to the components $-Py$ and $-Pz$, and to the components L_1 and L_2 of the lateral force L which eventually may act in the endsection of the rod. Remembering that the cross section under consideration with respect to the end section has been twisted through the angle ωt , the components Q_y and Q_z are represented by

$$\begin{aligned} Q_y &= -Py + L_1 \cos \omega t + L_2 \sin \omega t \\ Q_z &= -Pz - L_1 \sin \omega t + L_2 \cos \omega t \end{aligned} \quad \dots \quad (25)$$

The corresponding angles of shear are Q_y/β and Q_z/β . These values represent the y - and z -components of a unit-vector \bar{v} coinciding with the tangent to the central line of

the deflected rod. Consequently the three components of this vector \bar{v} — which from this moment may represent the constant velocity with which the origin of the system (S) is supposed to move along the central line — are given by:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= 1 \\ v_y &= \frac{-Py + L_1 \cos \omega t + L_2 \sin \omega t}{\beta} \\ v_z &= \frac{-Pz - L_1 \sin \omega t + L_2 \cos \omega t}{\beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \quad (26)$$

The moment \bar{M} acting upon the section t naturally varies with the parameter t . Its variation is due to two different causes: firstly to the rotation $\bar{o} dt$ of the system S (by which \bar{M} — even should it remain constant — changes its direction with respect to S); secondly to the variation $[\bar{P}, \bar{v} dt]$ of \bar{M} itself. Therefore we have

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = [\bar{M}, \bar{o}] + [\bar{P}, \bar{v}]$$

and consequently (with reference to the system S)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} &= M_y k_2 - M_z k_1 \\ \frac{dM_y}{dt} &= M_z w - M_x k_2 - \left(1 + \frac{P}{\beta} x\right) (Pz + L_1 \sin \omega t - L_2 \cos \omega t) \\ \frac{dM_z}{dt} &= M_x k_1 - M_y \omega + \left(1 + \frac{P}{\beta} x\right) (Py - L_1 \cos \omega t - L_2 \sin \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Again restricting ourselves to quantities of the first order, and consequently putting $x = 1$ we find, in combining (18) and (27)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= 0 \\ \frac{dk_1}{dt} &= \left(1 - \frac{\delta}{a}\right) \omega k_2 - \frac{P}{a} \left(1 + \frac{P}{\beta}\right) \left(z + \frac{L_1}{P} \sin \omega t - \frac{L_2}{P} \cos \omega t\right) \\ \frac{dk_2}{dt} &= -\left(1 - \frac{\delta}{a}\right) \omega k_1 + \frac{P}{a} \left(1 + \frac{P}{\beta}\right) \left(y - \frac{L_1}{P} \cos \omega t - \frac{L_2}{P} \sin \omega t\right) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Putting

$$\varrho = \left(1 - \frac{\delta}{a}\right) \quad \text{and} \quad q^2 = \frac{P}{a} \left(1 + \frac{P}{\beta}\right) \dots \dots \quad (29)$$

and introducing the complex variables

$$X = y + iz \quad Y = k_1 + ik_2 \quad L = L_1 + iL_2 \dots \dots \quad (30)$$

we deduce from (24) and (28) the equations

$$\frac{dX}{dt} + i\omega X = iY \quad \text{and} \quad \frac{dY}{dt} + i\varrho\omega Y = iq^2 \left(X - \frac{L}{P} e^{-i\omega t}\right). \quad (31)$$

Their solution is

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{L}{P} e^{-i\omega t} + A_1 e^{-i\mu_1 t} + A_2 e^{-i\mu_2 t} \\ Y &= A_1 (\omega - \mu_1) e^{-i\mu_1 t} + A_2 (\omega - \mu_2) e^{-i\mu_2 t} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (32)$$

where μ_1 and μ_2 design the roots of the equation

$$\mu^2 - \mu (1 + \varrho) \omega + \varrho \omega^2 - q^2 = 0. \quad \dots \quad (33)$$

If the spring is hinged neither an external lateral force nor an external bending moment occurs at its ends. Therefore the bending moments acting in its terminal sections are identical with the components of the torque $W = \delta\omega$ in the local Y - and Z -directions, so that both for $t = 0$ and $t = l$ we get

$$L = 0 \quad M_y = d\omega y \quad \text{and} \quad M_z = \delta\omega z$$

or, with regard to eqs. (23), (30) and (29)

$$L = 0 \quad \text{and} \quad Y = (1 - \varrho) \omega X.$$

Substituting these expressions into (32) it is evident that only a solution differing from $X = Y = 0$ will exist, if $(\mu_1 - \mu_2) l$ is a multiple of 2π . Buckling therefore occurs for the first time if

$$(\mu_1 - \mu_2) l = 2\pi$$

or according to eq. (33) if

$$\frac{1}{4} (1 - \varrho)^2 \omega^2 l^2 + q^2 l^2 = \pi^2. \quad \dots \quad (34)$$

In this equation ωl represents the total twist χ whereas ql can be expressed in terms of the compression ξ . Using (2), (3), (10), (11) and (29) we find

$$\left. \begin{aligned} q^2 l^2 &= \frac{2(2m+1)}{m+1} \left(\frac{l_0}{D} \right)^2 \xi \left\{ 1 - \frac{m+2}{2(m+1)} \xi \right\} \\ (1 - \varrho) \omega l &= \frac{\delta}{a} \chi = \frac{2m+1}{2m} \chi \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (35)$$

so that (34) can be written as:

$$\left(\frac{2m+1}{2m} \right)^2 \chi^2 + \frac{8(2m+1)}{m+1} \left(\frac{l_0}{D} \right)^2 \xi \left[1 - \frac{m+2}{2(m+1)} \xi \right] = 4\pi^2. \quad (36)$$

This relation between ξ , χ and l_0/D , has graphically been represented in fig. 8, ($m = 10/3$). As must be expected the curve belonging to $\chi = 0$ is identical with the drawn curve of fig. 3. It may be noticed that in absence of an axial load P a spring must be twisted through an angle of 313° before becoming unstable⁵⁾.

If the spring is "clamped" at both ends, no rotation ψ of the terminal cross sections occurs. Consequently the conditions

$$y = z = 0 \quad \text{and thus} \quad X = 0 \quad \left. \begin{aligned} t &= 0 \\ t &= l \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (37)$$

are to be fulfilled.

5) Comp. BIEZENO-GRAMMEL, I.c.

Moreover the (relative) lateral displacement of the ends must be zero. Considering an

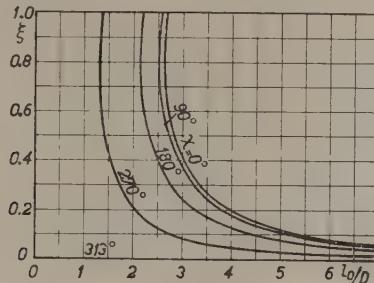


Fig. 8.

The critical relative compression ξ of a spring with hinged ends as function of the ratio l_0/D corresponding to various values of the twist angle χ .

element dt of the deflected central line, it is seen at once that its y - and z -components with regard to the corresponding system S are $(v_y - y)dt$ and $(v_z - z)dt$.

With regard to the y - and z -axes of the fixed system S_0 , corresponding to $t = 0$, the same components are $\{(v_y - y) \cos \omega t - (v_z - z) \sin \omega t\} dt$ and $\{(v_y - y) \sin \omega t + (v_z - z) \cos \omega t\} dt$. The displacement of the endpoint $t = l$ with respect to the origin of the system S_0 at the point $t = 0$ therefore has the components

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \int_0^l \{v_y - y\} \cos \omega t - (v_z - z) \sin \omega t \} dt \\ \zeta &= \int_0^l \{v_y - y\} \sin \omega t + (v_z - z) \cos \omega t \} dt \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (38)$$

As mentioned before $\eta + i\zeta$ must be zero. In virtue of (26) and (30) we find the condition

$$\int_0^l \left\{ \left(1 + \frac{P}{\beta} \right) X e^{i\omega t} - \frac{L}{\beta} \right\} dt = 0 \quad \dots \quad (39)$$

in which X has to be replaced by the first expression (32).

We now reduce the three equations (37) and (39) to one equation containing L by eliminating A_1 and A_2 . Making use of (33) and putting

$$\left. \begin{aligned} 2\gamma_1 &= (\omega - \mu_1)l = \frac{1}{2}(1 - \varrho)\omega l + \sqrt{\frac{1}{4}(1 - \varrho)^2\omega^2 l^2 + q^2 l^2} \\ 2\gamma_2 &= (\omega - \mu_2)l = \frac{1}{2}(1 - \varrho)\omega l - \sqrt{\frac{1}{4}(1 - \varrho)^2\omega^2 l^2 + q^2 l^2} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

we get

$$\frac{L}{P} \left\{ (e^{2i\gamma_1} - e^{2i\gamma_2}) + i \left(1 + \frac{P}{\beta} \right) \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\gamma_1\gamma_2} (e^{2i\gamma_1} - 1)(e^{2i\gamma_2} - 1) \right\} = 0. \quad (41)$$

This equation breaks up into the two components

$$\lambda_1 L_1 - \lambda_2 L_2 = 0 \quad \text{and} \quad \lambda_2 L_1 + \lambda_1 L_2 = 0 \quad \dots \quad (42)$$

where λ_1 and λ_2 stand for

$$\lambda_1 = -2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \left\{ \sin(\gamma_1 - \gamma_2) - \left(1 + \frac{P}{\beta}\right) \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2} \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \right\}, \quad (43)$$

$$\lambda_2 = +2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \left\{ \sin(\gamma_1 - \gamma_2) - \left(1 + \frac{P}{B}\right) \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2} \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \right\}.$$

From (42) it follows that buckling only occurs if

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 0$$

and this condition reduces to

$$\frac{\sin(\gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2} = \left(1 + \frac{P}{\beta}\right) \frac{\sin \gamma_1 \sin \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2}. \quad \dots \quad (44)$$

Introducing again the relative compression $\xi = \frac{P}{\gamma_0}$ and using (2), (10) and (11), the factor $(1 + P/\beta)$ can be replaced by

$$1 + \frac{P}{\beta} = \frac{1 - \frac{m+2}{2(m+1)} \xi}{1 - \xi}. \quad \dots \quad (45)$$

The explicite expressions for γ_1 and γ_2 are given by (40) in which ql and $(1 - \varrho)\omega l$ are to be replaced by (35). Equation (44) therefore may be looked upon as a relation

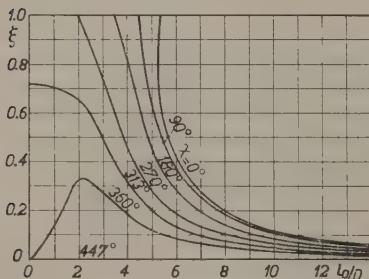


Fig. 9.

The critical relative compression ξ of a spring with built-in ends as function of the ratio l_0/D corresponding to various values of the twist angle χ .

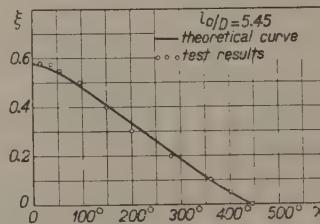


Fig. 10.

The critical relative compression ξ of a spring with built-in ends as function of the twist angle χ corresponding to the ratio $l_0/D = 5.45$; comparison with test results.

between corresponding values of the relative compression ξ and the total angle of twist χ at which buckling occurs.

Its graphical interpretation is given by fig. 9, in which, for various values of χ , the smallest buckling value ξ is represented as function of the parameter l_0/D . Attention may be drawn to the fact, that, in the absence of compressive forces, a spring has to be twisted through an angle of 447° before reaching its state of instability.

Experiments have been carried out on a helical spring characterized by $l_0/D = 5.45$ ($D = 18$ mm, wire diameter = 0.5 mm, pitch = 5 mm). The test results have been plotted in fig. 10, from which the agreement between theory and experiment can be judged.

Mathematics. — Bemerkung zum Problem der topologischen Erweiterung von Abbildungen.
Von J. DE GROOT. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

Ein Hauptproblem der topologischen Erweiterung in einem topologischen Raum R lautet folgendermassen: man verlangt eine Klassifikation derjenigen Punktmengen H in R , für welche jede topologische Abbildung von H auf eine mit H homöomorphe Punktmenge H' in R erweitert werden kann zu einer topologischen Selbstabbildung von R .

Es hat den Anschein, alsob G. CHOQUET dieses schwierige Problem für den Fall *beschränkter abgeschlossener* Punktmengen H im zwei- und dreidimensionalen Zahlenraum R_2 und R_3 gelöst oder jedenfalls zum gröszeren Teil gelöst hat¹⁾ (übrigens korrigiert er in seiner zweiten Note zum Teil seine ersten Ergebnisse, und gibt nirgends Beweise). Spezialfälle des Problems sind im Laufe der letzten zwanzig Jahre von verschiedenen Topologen behandelt worden²⁾.

Wir werden im Folgenden, und zwar auf sehr elementare Weise, dartun, dasz man im n -dimensionalen Zahlenraum R_n die *allgemeine* Lösung (also für beliebige Mengen H) des Hauptproblems besitzt, sobald die Lösung für die *beschränkten abgeschlossenen* Punktmengen H gefunden ist. In R_2 und R_3 würden somit die oben genannten Arbeiten von CHOQUET sogar die allgemeine Lösung des Hauptproblems geben.

Dieser Tatbestand beruht auf dem negativen, unten bewiesenen Resultat, dasz überhaupt keine nicht-beschränkten oder nicht-abgeschlossenen Punktmengen H existieren. Beim Beweise können wir $R = R_2$ annehmen, denn ganz analoge Betrachtungen sind für einen R_n aufzustellen.

Es sei zunächst gegeben im R_2 eine nicht-abgeschlossene Punktmenge A . Wir konstruieren eine topologische Abbildung von A auf eine gewisse Menge A' , die nicht erweiterbar ist zu einer topologischen Abbildung der abgeschlossenen Hülle A auf \bar{A}' . Es ist also A in der Tat kein H . Dazu wählen wir einen nicht zu A gehörigen Häufungspunkt P von A und schlagen um P einen Kreis K (sieh Figur 1). Man kann K derart in vier Sektoren I, II, III und IV einteilen, dasz es im Innern wenigstens eines dieser Sektoren, sagen wir in I, eine zu A gehörige unendliche Punktmenge gibt, welche P als Häufungspunkt besitzt. Wir konstruieren eine passend gewählte topologische Abbildung dieses Kreises K ohne P auf den Kreis der Figur 2 ohne die Strecke p' , wobei sich die Menge I auf I' abbildet. Dazu bestimmen wir in I ein von (unter anderem) zwei unendlichen Streckenzügen s_1 und s_2 berandetes Gebiet in der Weise, dasz in jedem der beiden übrigbleibenden (in der Zeichnung schraffierten) Teile von I eine unendliche zu A gehörige Punktmenge liegt, welche P als Häufungspunkt hat. Wie man diese Konstruktion in Einzelheiten auszuführen hat, entnimmt man leicht der Zeichnung. — P_1, P_3, P_5, \dots und P_2, P_4, P_6, \dots seien zwei in verschiedenen Teilen liegende, gegen P konvergierende und zu A gehörige Punktfolgen. Wir bilden jetzt I in der Weise topologisch auf I' ab, dasz dabei die Bildfolgen P'_1, P'_3, P'_5, \dots und P'_2, P'_4, P'_6, \dots zwei verschiedene Häufungspunkte P' und P'' besitzen (wie man diese Abbildung genau auszuführen hat, lässt sich wieder aus Figur 1 und 2 entnehmen). Die topologische Abbildung des ersten Kreises ohne P auf den zweiten

¹⁾ G. CHOQUET, C. R. Acad. Sci. Paris 206, 634—636 (1938); 210, 129—131 (1940).

²⁾ Eine merkwürdige, aber keinesfalls entscheidende Lösung für den Fall, dasz H ein Kontinuum und R eine kompaktifizierte Ebene, also eine Sphäre ist, gibt z.B. die wenig bekannte Arbeit von H. WOLKENSTÖRFER (Dissertation München (1929)), welche die Carathéodoryschen Primenden benutzt.

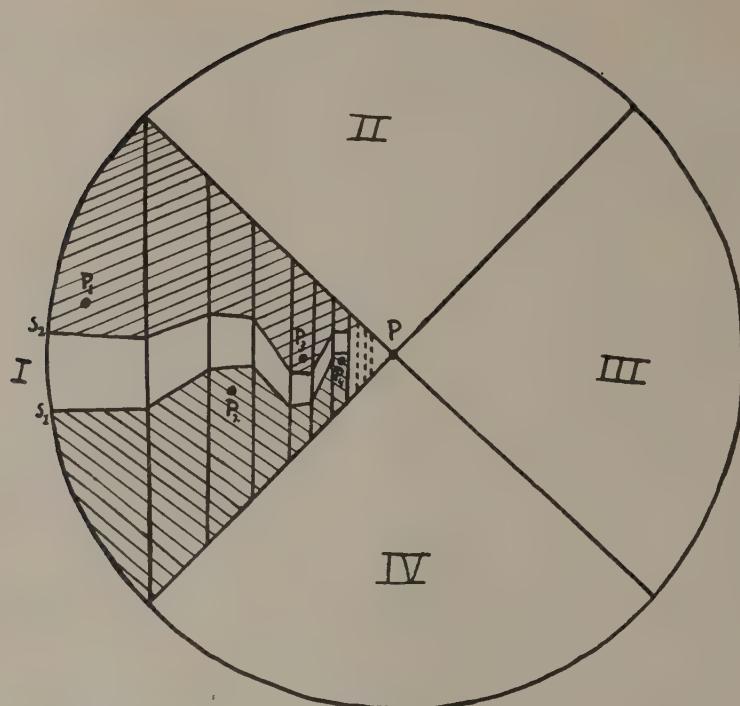


Fig. 1.

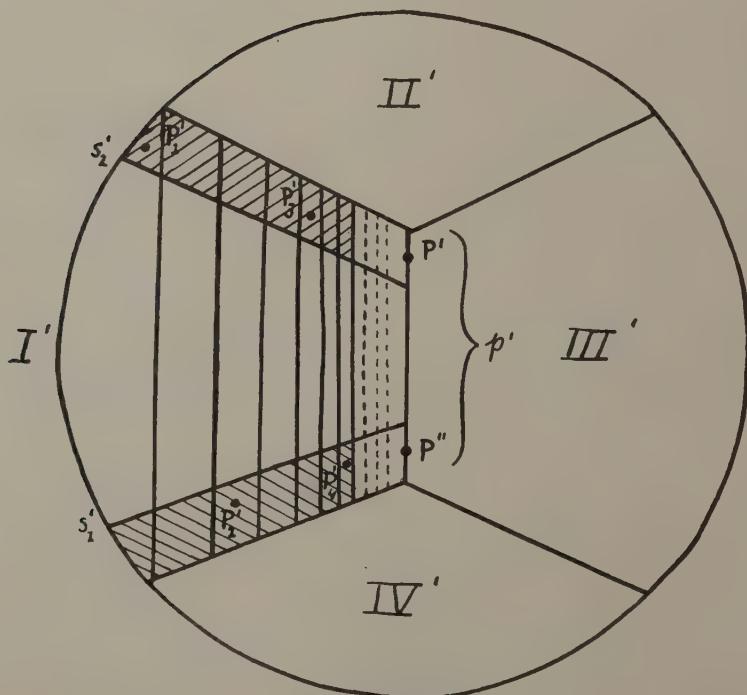


Fig. 2.

Kreis ohne p' wählen wir derart, dasz sie sich der Abbildung von I auf I' stetig anschlieszt. Diese Abbildung ist offenbar nicht erweiterbar zu einer Abbildung des ersten Kreises auf den zweiten Kreis, und ebensowenig lässt sich die hierdurch induzierte Abbildung von A auf A' erweitern zu einer Abbildung von \bar{A} auf \bar{A}' , weil die zu A gehörige Folge P_1, P_2, P_3, \dots gegen den einen Punkt P konvergiert, während die Bildfolge P'_1, P'_2, P'_3, \dots wenigstens zwei Häufungspunkte P' und P'' hat.

Es sei jetzt in R_2 gegeben eine nicht beschränkte Menge A . Wir bilden A topologisch ab auf eine beschränkte Punktmenge A' in R_2 . Dann aber ist \bar{A} nicht homöomorph mit \bar{A}' , denn wegen der Nichtbeschränktheit von A ist in $\bar{A}' - A'$ wenigstens ein Punkt anzugeben, dem bei einer topologischen Abbildung von \bar{A}' auf \bar{A} kein Punkt von \bar{A} zugeordnet werden könnte.

Hiermit ist unsere Behauptung in vollem Umfange bewiesen.

Natürlich gibt es auch ein Problem der topologischen Erweiterung von (zum Beispiel) beschränkten nicht abgeschlossenen Punktmengen. Man kann z. B. zwei derartige homöomorphe Punktmengen H und H' vorher als gegeben annehmen und dann fragen unter welchen Bedingungen eine topologische Abbildung von H auf H' erweiterbar ist.

Mathematics. — *Topologische Eigenschaften bewerteter Körper.* Von J. DE GROOT und F. LOONSTRA. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

Fasst man die Elemente a, b, \dots eines bewerteten Körpers $K^1)$ als Punkte eines Raumes auf und erklärt die Entfernung von a und b durch $|a-b|$, so genügt diese Entfernungdefinition den Entfernungspostulaten eines — im topologischen Sinne — metrischen Raumes²⁾. Von diesem Standpunkt aus betrachtet ist der Körper K ein topologischer Raum und ordnet sich die Bewertungstheorie in die metrischen (topologischen) Räume ein. Es besitzt also jeder bewertete Körper die Eigenschaft, normal zu sein.

Da sich jeder Körper bewerten lässt, können folglich in jedem Körper auf Grund einer Bewertung alle Definitionen wie etwa die der Fundamentalfolge, Nullfolge, Konvergenz, Häufungspunkt usw. eingeführt werden³⁾.

Wir werden uns im Folgenden mit der Untersuchung topologischer Eigenschaften bewerteter Körper beschäftigen, können uns dabei aber auf die nichtarchimedisch bewerteten Körper beschränken⁴⁾. Es gilt nun der

Satz I: Alle nichtarchimedisch bewerteten Körper sind nulldimensionale Räume⁵⁾.

Dieser ergibt sich aus: Jede abgeschlossene ε -Umgebung U_a ist offen. Aus:

$$|a-x| \leq \varepsilon, \quad b \in U_a, \quad |b-x_1| < \vartheta, \quad \vartheta \leq \varepsilon$$

folgt nämlich:

$$|a-x_1| = |a-b + b-x_1| \leq \max(|a-b|, |b-x_1|) \leq \varepsilon,$$

also ist für $\vartheta \leq \varepsilon$ jede ϑ -Umgebung U_b eines Punktes $b \in U_a$ in U_a enthalten.

Wir unterscheiden im Folgenden die trivialbewerteten und die nichttrivialbewerteten Körper.

Die trivialbewerteten Körper.

Für jedes Element $a \neq 0$ ist $|a| = 1$. Auf Grund der Definition ist für je zwei verschiedene Punkte a und b : $|a-b| = 1$, m.a.W.: die Punkte des Körperraumes von K sind isoliert. Der Körperraum ist vollständig, denn jede Fundamentalfolge aus K konvergiert.

1) Vgl. 1. KÜRSCHÁK, Ueber Limesbildung und die allgemeine Körpertheorie, J. f. d. r. u. ang. Math. **143** (1913).

2) F. LOONSTRA, Analytische Untersuchungen über bewertete Körper, (Amsterdam, 1941); im Folgenden mit L zitiert.

2) Vgl. P. ALEXANDROFF-H. HOPF, Topologie (Berlin 1935) (im Folgenden mit AH zitiert), S. 27. Wir verwenden im folgenden die Terminologie von AH.

3) Vgl. L, S. 5.

4) Die archimedisch bewerteten Körper sind nämlich zu einem mit gewöhnlichen Absolutbeträgen bewerteten Körper aus komplexen Zahlen isomorph (OSTROWSKI, Acta Math. **41** (1918)). Der topologische Raum, der dem Körper der komplexen Zahlen entspricht, ist die komplexe Ebene.

5) Vgl. auch BAER, Zur Topologie der Gruppen, J. f. d. r. u. ang. Math. **160** (1929), SCHÖBE, Beiträge zur Funktionentheorie in nichtarchimedisch bewerteten Körpern (Münster, 1930).

Dann und nur dann, wenn K abzählbar ist, enthält K eine abzählbare Umgebungsbasis.

Die nichttrivialbewerteten Körper.

Die nichttrivialbewerteten Körper K unterscheiden sich vorerst darin von den trivialbewerteten Körpern, dass sie alle insidicht sind: jedes Element $a \in K$ ist Häufungspunkt von K , wie man sofort durch Betrachtung der Menge $a + b^m$ erkennt, wenn $|b| < 1$ und m alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Die nichttrivialbewerteten Körper brauchen nicht vollständig zu sein. Ebenso wie in der CANTORschen Theorie der Irrationalzahlen lässt sich aber jeder nichttrivial bewertete Körper durch Hinzunahme von Fundamentalfolgen zu einem kleinsten vollständigen bewerteten Körper erweitern⁶⁾.

Wir stellen uns nun die Aufgabe die topologischen Eigenschaften aller möglichen nichttrivialbewerteten Körper zu untersuchen. Da man jeden Körper aus seinem Primkörper durch eine transzendenten Erweiterung und eine darauf folgende algebraische Erweiterung erhält, ist es zweckmässig, das Verhalten verschiedener topologischen Eigenschaften der bewerteten Körper zu untersuchen, wenn K :

- a. zur vollständigen Hülle,
- b. algebraisch,
- c. beliebig transzendent

erweitert wird.

Zum richtigen Verständnis dieser Abhandlung sei folgendes noch erwähnt:

1. Die Fundamentalfolgen $\{a_i\}$ (keine Nullfolgen) nichtarchimedisch bewerteter Körper K haben die Eigenschaft, dass von einer Stelle an

$$|a_k| = |a_{k+1}| = |a_{k+2}| = \dots \text{ 6).}$$

Die Bewertung für die mittels der Fundamentalfolgen $\{a_i\}$ definierten Elemente a der kleinsten vollständigen Hülle ist $|a| = \lim_{i \rightarrow \infty} |a_i| = |a_k|$ ⁶⁾.

Ausserdem ergibt sich aus dieser Aussage über Fundamentalfolgen, dass es zu jedem Element a eines nichtarchimedisch bewerteten Körpers K eine Umgebung U_a gibt, die aus allen Elementen x mit der Eigenschaft $|x| = |a|$ bestehende „Klassenumgebung“ von a . Die Klassenumgebungen liegen alle isoliert voneinander, denn es ist für $|a| > |b|$ immer $|a-b| = |a|$.

Man beweist einfach, dass die Klassenumgebungen offen und abgeschlossen sind.

2. Die Bewertung der algebraischen Erweiterungen vollständiger bewerteter Körper K erfolgt so, dass für die Elemente a , deren Definitionsgleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (a_i \in K)$$

in K irreduzibel ist, $|a| = |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

3. Die Bewertung einer einfachen transzendenten Erweiterung $K(x)$ erfolgt mit Hilfe einer pseudokonvergenten Folge $\{a_i\}$ von in bezug auf K algebraischen Elementen⁸⁾. Wir unterscheiden nach der Art der pseudokonvergenten Folge $\{a_i\}$ aus K zweierlei in bezug auf K transzendenten Elemente:

- a. die „vervollständigenden transzendenten“ Elemente, d.h.: in bezug auf K transzendenten Elemente x , welche mit Hilfe einer Folge $\{a_i\}$ ($a_i \in K$) definiert sind, so dass $\lim_{i,k \rightarrow \infty} |a_i - a_k| = 0$, also $x = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$ und $|x| = \lim_{i \rightarrow \infty} |a_i|$,

⁶⁾ Vgl. L. S. 6—8.

⁷⁾ Vgl. KÜRSCHÁK, J. f. d. r. u. ang. Math. **143** (1913).

⁸⁾ Vgl. A. OSTROWSKI, Math. Zeitschrift **39** (1934). Definition:

$$|a_{i+1} - a_i| < |a_i - a_{i-1}| \text{ oder } a_{i+1} = a_i \text{ für fast alle } i.$$

b. die „vollkommen transzendenten“ Elemente, das sind alle in bezug auf K nicht vervollständigende transzendenten Elemente. Dieser Fall gliedert sich:

1°. wie unter a., aber die a_i der pseudokonvergenten Folge sind in bezug auf K algebraische Elemente, und für unendlich viele a_i gilt nicht $a_i \subset K$.

2°. $\lim_{i, k \rightarrow \infty} |a_i - a_k| \neq 0$, $|a_n| = |a_{n+1}| = |a_{n+2}| = \dots$, also $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$

existiert nicht, aber es ist $|x| = \lim_{i \rightarrow \infty} |a_i| = |a_n|$.

3°. $\lim_{i, k \rightarrow \infty} |a_i - a_k| \neq 0$, $|a_n| > |a_{n+1}| > |a_{n+2}| > \dots$; $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$

existiert nicht, aber es ist $|x| = \lim_{i \rightarrow \infty} |a_i|$.

Wir betrachten zuerst die Wertemenge W eines bewerteten Körpers. Es lässt sich nun leicht beweisen:

Satz II: Die Eigenschaft eines bewerteten Körpers, eine abzählbare Wertemenge W zu besitzen, wird nicht zerstört durch

1. die Erweiterung zur vollständigen Hülle,

2. eine beliebige algebraische Erweiterung,

3. eine transzendenten Erweiterung, bei der höchstens abzählbar viele neue Werte zu W hinzugefügt werden.

Beweis: 1. Die Elemente α der kleinsten vollständigen Hülle \bar{K} von K haben ja die Eigenschaft $|\alpha| = \lim_{i \rightarrow \infty} |a_i| = |a_k|$ für $k \geq k_0$, also: die vollständige Hülle \bar{K} von K

hat dieselbe Wertemenge wie K .

2. Die Wertemenge W einer bewerteten, algebraisch abgeschlossenen Erweiterung eines vollständigen bewerteten Körpers K enthält die reellen Zahlen $|a_n|^{\frac{1}{n}}$, wo $|a_n|$ nur abzählbar, viele reelle Werte annimmt. Mithin ist auch die Menge der Zahlen $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ abzählbar.

Bemerkung: Ist die Wertemenge von K diskret, d.h.: enthält sie die Null und alle positiven und negativen Potenzen einer festen Zahl c ($0 < c < 1$), so ist die Wertemenge endlicher algebraischer Erweiterungen ebenfalls eine diskrete Punktmenge reeller Zahlen. Algebraisch abgeschlossene Körper haben stets dichte Bewertung, wie SCHÖBE bewiesen hat⁵⁾.

Wir behandeln nun die Frage nach der Existenz einer abzählbaren Umgebungenbasis eines bewerteten Körpers. In metrischen Räumen ist die Existenz einer abzählbaren Basis mit der Existenz einer abzählbaren dichten Punktmenge gleichbedeutend. Wir beweisen nun den

Satz III: Die Eigenschaft eines nichtarchimedisch bewerteten Körpers, eine abzählbare Umgebungenbasis zu besitzen, wird nicht zerstört durch:

1. die Erweiterung zur vollständigen Hülle,

2. eine beliebige algebraische Erweiterung,

3. eine höchstens abzählbare transzendenten Erweiterung.

Beweis: 1. ist ohne weiteres klar.

2. Sei R_1 eine im vollständigen bewerteten Körper K überall dichte abzählbare Menge. Da jede algebraische Erweiterung des Grundkörpers K eine Teilmenge der kleinsten algebraisch abgeschlossenen bewerteten Erweiterung K' von K ist, beweisen wir die Existenz einer in K' überall dichten abzählbaren Menge $R_2 \subset K'$. Jedes Element $\alpha \subset K'$ befriedigt eine in K irreduzible Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

Die Elemente von R_2 sind nun die Elemente ϱ , deren Definitionsgleichungen

$$x^n + r_1 x^{n-1} + r_2 x^{n-2} + \dots + r_n = 0$$

nur Koeffizienten $r_i \in R_1$ enthalten. Weil die Anzahl der r_i abzählbar ist, muss ebenfalls die Menge R_2 der von diesen Gleichungen definierten Elemente ϱ abzählbar sein. Wir beweisen nun, dass die Menge R_2 überall dicht in K' liegt. Sei

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \dots \dots \quad (1)$$

die Definitionsgleichung eines Elements α aus K' mit Koeffizienten aus K und setzen wir voraus: $\alpha \in K' - R_1$. Wir versuchen, die Koeffizienten der linken Seite dieser Gleichung zu approximieren. Es seien

$$x^n + r_{i1} x^{n-1} + r_{i2} x^{n-2} + \dots + r_{in} = 0 \dots \dots \quad (2)$$

Gleichungen, so dass $|a_k - r_{ik}| < \varepsilon$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $i > n_\varepsilon$). Die Möglichkeit der Bestimmung der r_{ik} folgt aus der Tatsache, dass R_1 dicht liegt in K . Es bleibt also noch übrig, zu beweisen, dass bei geeigneter Numerierung die Wurzeln $\varrho_{i1}, \varrho_{i2}, \dots, \varrho_{in}$ von (2) für $i \rightarrow \infty$ sich den Wurzeln a_1, a_2, \dots, a_n von (1) annähern, m.a.W. dass für alle $k = 1, 2, \dots, n$: $\lim_{i \rightarrow \infty} |\varrho_{ik} - a_k| = 0$, d.h., dass die Wurzeln dieser Gleichungen stetige

Funktionen ihrer Koeffizienten sind. Der Beweis ist möglich mittels des Satzes⁹⁾¹⁰⁾: Wenn $F(xy) = 0$ eine Gleichung in zwei Veränderlichen x und y ist, deren linke Seite sich entwickeln lässt in eine konvergente, nach aufsteigenden Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ geordnete Reihe (mit Koeffizienten aus einem vollständigen bewerteten Körper K) ohne konstantes Glied und mit nichtverschwindendem Koeffizienten von $y - y_0$, so hat diese Gleichung eine Lösung y , die für $x = x_0$ gleich y_0 wird. Diese Wurzel y lässt sich in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von $x - x_0$ entwickeln.

Wir wenden nun diesen Satz über implizite Funktionen etwas verallgemeinert an: Es sei $F(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ eine Gleichung, deren linke Seite sich entwickeln lässt in eine konvergente, nach aufsteigenden Potenzen von $x - a$ und $a_i - a_i^0$ geordnete Reihe ohne konstantes Glied und mit nichtverschwindendem Koeffizienten von $a_i - a_i^0$, so hat diese Gleichung eine Lösung, die sich a annähert, wenn $a_i \rightarrow a_i^0$. Diese Wurzel lässt sich in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von $a_i - a_i^0$ entwickeln.

Der Beweis erfolgt auf ähnliche Weise. Damit ist dann zugleich die stetige Abhängigkeit der Wurzeln von den Koeffizienten bewiesen und schliesslich die Existenz einer abzählbaren in K' überall dichten Teilmenge R_2 von K' .

3. Sei R_1 die im Grundkörper K überall dicht liegende abzählbare Punktmenge. Adjungiert man höchstens abzählbar viele transzendente Elemente x_1, x_2, \dots und sei $K' = K(x_1, x_2, \dots)$ die transzidente Erweiterung, so enthält K' ebenfalls eine abzählbare in K' überall dicht liegende Menge R_2 . R_2 ist nämlich die Menge der rationalen Funktionen in den Veränderlichen x_1, x_2, \dots mit Koeffizienten aus R_1 .

Im Zusammenhang hiermit folgt die Beantwortung der Frage, unter welchen Umständen ein bewerteter Körper eine abzählbare Umgebungenbasis enthält. Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer abzählbaren Basis eines bewerteten Körpers K ist die Abzählbarkeit der Wertemenge W von K : Ist W nicht abzählbar, so existiert keine abzählbare Basis mehr; gäbe es nämlich eine solche Basis, so würde das System der Klas-

⁹⁾ Vgl. L. S. 31.

¹⁰⁾ Der Beweis ist auch möglich mit Hilfe einer TAYLORentwicklung und vollständiger Induktion.

senumgebungen abzählbar, also W abzählbar sein. Die Abzählbarkeit von W ist dagegen keine hinreichende Bedingung für die Existenz einer abzählbaren Basis. (Vgl. Beispiele a und b .)

Man erhält einen beliebigen Körper K aus seinem Primkörper K_1 durch eine transzendenten und darauf folgende algebraische Erweiterung.

Für die Adjunktion der transzendenten Elemente x benutzen wir die Möglichkeit einer Wohlordnung der $x_i : x_1, x_2, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots$

So konstruieren wir die aufeinanderfolgenden Körper

$$K_1, K_1(x_1) = K_2, K_1(x_1, x_2) = K_3, \dots, K_1(x_1, x_2, \dots) = \\ = K_\omega, K_1(x_1, x_2, \dots, x_\omega) = K_{\omega+1}, \dots$$

Ist K bewertet, so sind q.q. auch alle K_i bewertet.

Jedes Element x_i , das vollkommen transzendent in bezug auf K_i ist, nennen wir kurzweg ein vollkommen transzendent Element von K .

Satz IV: Es sei K_1 ein nichttrivial bewerteter Primkörper. Ein beliebiger Körper K mit Primkörper K_1 enthält dann und nur dann eine abzählbare Umgebungenbasis, wenn die Anzahl der adjungierten vollkommen transzendenten Elemente höchstens abzählbar ist.

Beweis: Die Existenz einer abzählbaren Basis kann nur zerstört werden durch Adjunktion von nichtabzählbar vielen vollkommen transzendenten Elementen (Satz III).

Es ist klar, dass x_i dann und nur dann Häufungspunkt von K_i ist, wenn x_i ein in bezug auf K_i vervollständigendes transzendenten Element ist. Ein vollkommen transzendenten Element x_i ist also in bezug auf K_i isoliert. Würden also nichtabzählbar viele vollkommen transzendenten Elemente adjungiert, so gäbe es eine nichtabzählbare aus isolierten Punkten bestehende Menge im Körperraum von K , und es existierte keine abzählbare Basis.

Bemerkung: Die Eigenschaft von K „eine höchstens abzählbare Menge von vollkommen transzendenten Elementen zu besitzen“ ist — wegen Satz IV — nur von K abhängig, also unabhängig von der gewählten Wohlordnung: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots$

Beispiele: a. Adjungiert man zum endlichen Körper K_0 der Restklassen $\text{mod } p$ nichtabzählbar viele transzendenten Elemente x_i mit $|x| = 1$, so enthält W nur die Zahlen 0 und 1; dagegen existiert keine abzählbare Basis.

b. Sei Δ ein Grundkörper, $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ zwei pseudokonvergente Folgen;

$$\lim_{i, k \rightarrow \infty} |a_i - a_k| \neq 0, \lim_{i, k \rightarrow \infty} |b_i - b_k| \neq 0, \lim_{i \rightarrow \infty} |a_i| = \lim_{i \rightarrow \infty} |b_i| = A, \\ |a_n| > |a_{n+1}| > |a_{n+2}| > \dots, |b_n| > |b_{n+1}| > |b_{n+2}| > \dots$$

Wir adjungieren zuerst mit Hilfe der Folge $\{a_i\}$ ein transzendenten Element x und erweitern $\Delta(x)$ zu seiner kleinsten vollständigen Hülle $\overline{\Delta(x)} = \Delta'$. Darauf adjungieren wir mit Hilfe der Folge $\{b_i\}$ ein transzendenten Element y . So entsteht der Körper $\Delta'(y)$. Es ist nun $|y - x| = \lim_{i \rightarrow \infty} |b_i - x| = \lim_{i \rightarrow \infty} |b_i|$, denn $|x| = A < |b_i|$ für jedes i , also $|y - x| = A$.

Die adjungierten vollkommen transzendenten Elemente liegen in einer Entfernung A auseinander und sind folglich isoliert. Adjungiert man nichtabzählbar viele solcher Elemente, so bleibt W unverändert, aber die transzendenten Erweiterung enthält eine nichtabzählbare isolierte Punktmenge, in der je zwei Punkte die Entfernung A haben.

Satz V: Die Eigenschaft eines bewerteten Körpers, im Kleinen kompakt zu sein, wird nicht zerstört durch

1. die Erweiterung zur vollständigen Hülle,
2. eine endliche algebraische Erweiterung.

Die bewerteten Körper, die im Kleinen kompakt sind, besitzen die Eigenschaft, dass ihre Klassenumgebungen kompakt sind¹¹⁾ ¹²⁾.

Wir sind nun imstande, topologische Eigenschaften bewerteter Körper zusammenzustellen. Dazu benutzen wir die Eigenschaft, dass man jeden Körper aus seinem Primkörper durch eine transzendentale Erweiterung und eine darauf folgende algebraische Erweiterung erhält. Wir untersuchen zuerst den Primkörper K_0 von der Charakteristik 0.

Dieser Körper lässt sich nichtarchimedisch nur p -adisch bewerten.

Die vollständige Hülle \bar{K}_0 ist der HENSELsche Körper der rationalen p -adischen Zahlen, dessen Elemente die Form haben

$$a = p^k (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots); a_i = 0, 1, 2, \dots, p-1; k \text{ ganz.}$$

Setzt man $|p| = c$ ($0 < c < 1$), so ist $|a| = ck$.

Die Wertemenge W von \bar{K}_0 ist also die diskrete Menge reeller Zahlen ck , worin c eine feste Zahl ist und k die ganzen Zahlen durchläuft. W enthält als einzigen Häufungspunkt die Null. \bar{K}_0 besitzt eine abzählbare Basis, denn, die abzählbare Menge der rationalen Zahlen aus K_0 liegt überall dicht in \bar{K}_0 . Der Körperraum von K_0 ist ein metrischer Raum, also

1° *normal*, 2° besitzt er eine *abzählbare Basis*, 3° ist er *nulldimensional*, 4° *insidhdicht*, 5° *vollständig* und 6° *im Kleinen kompakt*.

Die beiden ersten Eigenschaften besagen, dass \bar{K}_0 einer Teilmenge des HILBERTschen Raumes homoömorph ist¹³⁾. Die erste, zweite und dritte Eigenschaft sagen aus, dass K_0 einer Punktmenge des CANTORSchen Diskontinuums homoömorph ist¹⁴⁾. Für allgemeinere bewertete Körper bekommen wir dann durch Anwendung von Satz I und IV: Jeder nichttrivial nichtarchimedisch bewertete Körper K von der Charakteristik 0 ist einer Teilmenge des HILBERTschen Raumes und einer Teilmenge des CANTORSchen Diskontinuums homoömorph, wenn die Anzahl der adjungierten vollkommen transzendenten Elemente höchstens abzählbar ist.

Hat der Primkörper K_p die Charakteristik p , so ist K_p nur trivial zu bewerten. Die algebraischen Erweiterungen von K_p sind ebenfalls trivial bewertet. Soll eine transzendentale Erweiterung von K_p nichttrivial bewertet sein, so setzt man voraus $|x| < 1$ (u.U. ist x durch $\frac{1}{x}$ zu ersetzen). Erweitern wir dann eine solche transzendentale Erweiterung zur kleinsten vollständigen Hülle und darauf algebraisch, so sind die bewerteten algebraischen Erweiterungen nichttrivial bewertet. Für jeden nichttrivial nichtarchimedisch bewerteten Körper K von der Charakteristik p , wobei die Anzahl der adjungierten vollkommen transzendenten Elemente höchstens abzählbar ist, sind die Aussagen richtig: K ist

¹¹⁾ VAN DANTZIG hat bereits ausgesprochen (Studien over Topologische Algebra, Amsterdam 1931), dass jeder im Kleinen kompakte und perfekte nulldimensionale topologische Körper K von der Charakteristik 0 eine endliche (algebraische) Erweiterung $K_0(\alpha)$ des Körpers K_0 der rationalen Zahlen darstellt (und umgekehrt), und dass jeder im Kleinen kompakte und perfekte topologische Körper K von der Charakteristik p nulldimensional ist und aus dem Primkörper durch Adjunktion einer (p^k-1) ten Einheitswurzel ε und einer Transzendenten π und anschliessende Vervollständigung erhalten wird.

¹²⁾ In einer demnächst erscheinenden Abhandlung von LOONSTRA wird dieser teilweise bekannte Sachverhalt erklärt.

¹³⁾ Vgl. AH, S. 81.

¹⁴⁾ Vgl. SIERPINSKI, Fund. Math. 2, 89 (1921).

einer Teilmenge des HILBERTschen Raumes und einer Teilmenge des CANTORSchen Diskontinuums homoömorph.

Ebenso wie man die komplexe Ebene mittels eines Punktes, des „unendlichen“ Punktes, kompaktifizieren kann (denn die komplexe Ebene ist im Kleinen kompakt), so lassen sich auch diejenigen bewerteten Körper, die im Kleinen kompakt sind, mittels eines Punktes kompaktifizieren. Der Körper \bar{K}_0 der rationalen p -adischen Zahlen, also wegen des Satzes V auch jede endliche algebraische Erweiterung von \bar{K}_0 ist im Kleinen kompakt. Durch die Hinzufügung eines Punktes werden die im Kleinen kompakten Körper zu einem kompakten insichtdichten nulldimensionalen Raum, also zum CANTORSchen Diskontinuum selbst homoömorph¹⁵⁾. Umgebung dieses hinzugefügten Punktes heisst jede Menge $|x| > k$, worin k der Wertemenge W , also der Menge W der abzählbar vielen Bewertungen entnommen ist. Die im Kleinen kompakten nichtarchimedisch bewerteten Körper sind also bis auf einen Punkt mit dem CANTORSchen Diskontinuum homoömorph.

Schliesslich weisen wir noch darauf hin, dass ZIPPIN¹⁶⁾ für semikompakte¹⁷⁾ Räume bewiesen hat: Jeder semikompakte vollständige Raum mit abzählbarer Basis kann durch Hinzufügung einer abzählbaren Punktmenge kompaktifiziert werden. Nun sind alle nulldimensionalen Räume semikompakt, weil es in jedem solchen Raum zu jedem Punkt beliebig kleine Umgebungen mit leeren Begrenzungen gibt. Alle nichtarchimedisch bewerteten Körper K , welche eine abzählbare Basis besitzen, können also durch Hinzufügung einer abzählbaren „unendlichen“ Punktmenge kompaktifiziert werden. Man kann diese Kompaktifizierung derart ausführen, dass der kompaktifizierte Raum ebenfalls nulldimensional (und insichtdicht), also zum CANTORSchen Diskontinuum homoömorph ist.

Zusammenfassung.

1. Alle nichtarchimedisch bewerteten Körper sind nulldimensionale metrische Räume.
2. Ein nichttrivial nichtarchimedisch bewerteter Körper enthält dann und nur dann eine abzählbare Basis, wenn bei der sukzessiven Erzeugung des Körpers aus seinem Primkörper die Anzahl der adjungierten vollkommen transzendenten Elemente höchstens abzählbar ist.
3. Alle nichttrivial nichtarchimedisch bewerteten Körper K , welche eine abzählbare Basis besitzen, sind bis auf eine höchstens abzählbar unendliche Punktmenge zum CANTORSchen Diskontinuum homoömorph. Insbesondere sind die im Kleinen kompakten nichtarchimedisch bewerteten Körper bis auf einen Punkt zum CANTORSchen Diskontinuum homoömorph.

¹⁵⁾ Vgl. L. E. J. BROUWER, Verslagen Akad. Amsterdam **18**, 835 (1910).

¹⁶⁾ Vgl. L. ZIPPIN, On Semicompact Spaces, American Journal of Math. **57**, 327—341 (1935).

¹⁷⁾ Ein Raum heisst semikompakt, wenn es darin zu jedem Punkt beliebig kleine Umgebungen mit kompakten Begrenzungen gibt.

Mathematics. — *Im Kleinen kompakte nichtarchimedisch bewertete Körper.* Von

F. LOONSTRA. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

Dieser Artikel enthält eine Behandlung aller möglichen im Kleinen kompakten¹⁾ nichtarchimedisch bewerteten²⁾ Körper. Darin gelange ich zu Ergebnissen, die in früher von VAN DANTZIG aufgestellten Sätzen³⁾ enthalten sind.

Satz I: *Dafür dasz ein nichtarchimedisch bewerteter Körper K im Kleinen kompakt ist, sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:*

1. K ist vollständig⁴⁾.
2. K ist diskret bewertet⁵⁾.
3. K hat endlichen Index⁶⁾.

(SCHÖBE⁷⁾ hat bewiesen, dass für die Gültigkeit des BOLZANO-WEIERSTRASZschen Häufungstellensatzes in einem nichtarchimedisch bewerteten Körper K diese drei Bedingungen 1,2 und 3 notwendig und hinreichend sind. Im allgemeinen ist ein metrischer Raum R dann und nur dann kompakt, wenn R vollständig und totalbeschränkt ist. Weil R nun ausserdem ein Körper ist, so stellt es sich einfach heraus, dasz für den Beweis des HEINE-BORELSchen Ueberdeckungssatzes in einem beschränkten Teil von R die Gültigkeit des Häufungstellensatz ausreicht. Die Gültigkeit des I. Satzes folgt mithin sofort aus den SCHÖBEschen Resultaten. Es wird hier jedoch ein davon abweichender Beweis gegeben.)

Beweis: Die Bedingungen sind notwendig.

1. Setzen wir voraus, dasz K nicht vollständig ist, so gibt es eine Fundamentalfolge $\{a_i\} \subset K$, deren Limes a nicht in K , sondern in \bar{K} ⁸⁾ existiert. Es sei $|a - a_n| \leq \varepsilon_0$ für $n \geq n(\varepsilon_0)$, und $a' \in K$, so dasz in K : $|a - a'| < \vartheta$ für $\vartheta < \varepsilon_0$.

Wir weisen dann nach, dasz eine in K beliebige Umgebung U_b : $|x - b| \leq \varepsilon_1$ nicht kompakt ist, d.h.: dasz es möglich ist, eine in U_b gelegene Folge $\{\bar{a}_i\} \subset K$ zu bestimmen, welche nicht in K konvergiert. Dazu transformieren wir \bar{K} mit Hilfe der Abbildung $y = \frac{b}{a'} \cdot x$, so dasz $a' \rightarrow b$. Das aus a transformierte Element $\frac{b}{a'} \cdot a$ liegt in \bar{U}_b für $\left| \frac{b}{a'} \cdot (a - a') \right| < \frac{\varepsilon_1}{2}$, mithin $\vartheta < \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot \left| \frac{a'}{b} \right|$ und die transformierten a_n ($n \geq n(\varepsilon_0)$) liegen für $\varepsilon_0 \left| \frac{b}{a'} \right| < \varepsilon_1$, also $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 \left| \frac{a'}{b} \right|$ in U_b .

Die Abbildung $y = \frac{b}{a'} \cdot x$ führt Fundamentalfolgen in Fundamentalfolgen über.

Die Folge $\{\bar{a}_i\}$ konvergiert aber in U_b nicht, m.a.W.: U_b ist nicht kompakt.

¹⁾ Der topologische Raum R heiszt kompakt im Kleinen, wenn jeder seiner Punkte eine Umgebung besitzt, deren abgeschlossene Hülle kompakt ist.

²⁾ Wir betrachten nur die nichttrivial bewerteten Körper.

³⁾ V. DANTZIG, Studiën over Topologische Algebra, Amsterdam 1931, S. 22.

⁴⁾ Ein metrischer Raum K heiszt vollständig, wenn jede Fundamentalfolge aus K konvergent ist.

⁵⁾ K heiszt diskret bewertet, wenn die Wertmenge aus 0 und den ganzen Potenzen einer zwischen 0 und 1 gelegenen Zahl besteht.

⁶⁾ Der Index der Gruppe sämtlicher $|x| < 1$ innerhalb der additiven Gruppe aller $|x| \leq 1$ heiszt Index des Körpers K .

⁷⁾ Beiträge zur Funktionentheorie in nichtarchimedisch bewerteten Körpern, Münster 1930.

⁸⁾ K ist die vollständige Hülle von \bar{K} .

2. Ist die Bewertung von K nicht diskret, so lässt sich beweisen, dass jede Umgebung $U_a : |a - x| \leq \varepsilon_1$ eines Punktes $a \in K$ eine unendliche Menge \mathfrak{N} ohne Häufungspunkt enthält. Sei $\varepsilon_1 < |a|^0$, so ist für $x \in U_a$:

$$|x| = |x - a + a| = \max(|x - a|, |a|) = |a|.$$

Alle Elemente $a + c$ mit $|c| < \varepsilon_1$ sind also in U_a enthalten. \mathfrak{N} ist die Menge der Elemente $a + c \in U_a$ mit $\varepsilon_0 < |c| < \varepsilon_1$. Da wir eine dichte Bewertung vorausgesetzt haben, dürfen wir annehmen, dass es unendlich viele c gibt mit voneinander verschiedener Bewertung zwischen ε_0 und ε_1 . Die Menge \mathfrak{N} besitzt keine Häufungsstelle: Seien nämlich $a + c_1$ und $a + c_2$ zwei verschiedene zu \mathfrak{N} gehörige Elemente, so ist:

$$|(a + c_1) - (a + c_2)| = |c_1 - c_2| = \max(|c_1|, |c_2|) > \varepsilon_0.$$

Es sei nun d ein beliebiges Element aus K . Aus $|d - a - c_1| < \varepsilon_0$ folgt:

$$|d - a - c_2| = \max(|d - a - c_1|, |c_1 - c_2|) > \varepsilon_0.$$

Die Umgebung $|x - d| < \varepsilon_0$ von d enthält also höchstens ein Element von \mathfrak{N} ; \mathfrak{N} besitzt also keinen Häufungspunkt, m.a.W.: U_a ist nicht kompakt.

3. Zum Schluss zeigen wir die Notwendigkeit eines endlichen Index. Setzen wir das Gegenteil voraus, d.h.: nehmen wir an, dass e_1, e_2, \dots die Repräsentanten unendlich vieler von einander und von der Nullklasse verschiedenen Restklassen sind, so ist

$$|e_i| = 1, |e_i - e_k| = 1 \ (i \neq k).$$

Wir können beweisen, dass eine Umgebung U_a von $a \in K : |x - a| \leq \varepsilon$ eine unendliche Menge \mathfrak{M} ohne Häufungspunkt enthält. Sei $a \in K$ ein Element mit $|a| < 1$ und sei k so bestimmt, dass $|a|^k < \varepsilon$. Wir setzen $ak = c$ und $|ak+1| = \vartheta$. Betrachtet man nun die Folge $\mathfrak{M} : a + ce_1, a + ce_2, \dots$, dann ist $\mathfrak{M} \subset U_a$, denn $|a + ce_i - a| = |ce_i| = |c| > \varepsilon$. \mathfrak{M} besitzt aber keine Häufungsstelle. Seien nämlich $a + ce_1$ und $a + ce_2$ zwei verschiedene Elemente von \mathfrak{M} , so ist

$$|(a + ce_1) - (a + ce_2)| = |c| \cdot |e_1 - e_2| > \vartheta.$$

Sei b ein beliebiges Element von K , so dass $|b - (a + ce_1)| < \vartheta$, so ist

$$|b - a - ce_2| = \max(|b - a - ce_1|, |ce_1 - ce_2|) > \vartheta,$$

m.a.W.: in der Umgebung $|x - b| < \vartheta$ liegt höchstens ein Element von \mathfrak{M} : b kann kein Häufungspunkt von \mathfrak{M} sein. \mathfrak{M} besitzt also keine Häufungsstelle, mithin ist U_a nicht kompakt.

Da diese drei Bedingungen auch hinreichen, lässt sich in folgender Weise erklären: Es sei K diskret bewertet und π Primelement, d.h.: $|\pi|$ die grösste Bewertung < 1 , so hat jedes Element von K die Gestalt

$$a = \varrho_a \pi^a + \varrho_{a+1} \pi^{a+1} + \varrho_{a+2} \pi^{a+2} + \dots \quad (1)$$

in der a eine positive oder negative ganze Zahl darstellt, während die ϱ_a einem endlichen Restklassensystem \mathfrak{R} entnommen sind. Die Koeffizienten ϱ_a dieser Potenzreihen bilden einen endlichen Körper \mathfrak{R} , denn mit $|\varrho_1| = 1$ und $|\varrho_2| = 1$ ist auch $|\varrho_1 \varrho_2| = 1$ und $\left| \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right| = 1$. \mathfrak{R} ist also von der Charakteristik p . Es ist $|a| = |\pi|^a$.

Wir beweisen: Die Menge der Elemente a für festes a ist dem CANTORSchen Diskontinuum homöomorph. Man kann nämlich jedes System von Elementen (1) geometrisch interpretieren, wenn man sich eine gerade Linie in Strecken C_a gleicher Länge verteilt denkt.

⁰⁾ Der Beweis ändert sich für $|a| < \varepsilon_1$ nur wenig.

Jede Strecke C_a enthält nun die Elemente (1) einer bestimmten Klasse C_a , also die Menge der Elemente $a = \pi^a (\varrho_a + \varrho_{a+1} \pi + \varrho_{a+2} \pi^2 + \dots)$ für festes a . Sei nämlich i der Index des Körpers K , $\varrho_0 = 0$, $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{i-1}$ die Repräsentanten des endlichen Restklassensystems. Weil die ϱ_k einen endlichen Körper bestimmen, ist die Anzahl $i = p^n$, also für $p > 2$ ist i ungerade. Man teile jede Strecke in $2i - 3$ Abschnitte und lasse den 2., 4., ..., $(2i - 4)$ -ten Abschnitt mit ihren Endpunkten weg; die übrigen Abschnitte bezeichne man mit $(\varrho_1), (\varrho_2), \dots, (\varrho_{i-1})$, jeden beliebigen davon mit (ϱ_{k_1}) . Jeden Abschnitt (ϱ_{k_1}) , teile man in $2i - 1$ Abschnitte, von denen der 2., 4., ..., $(2i - 2)$ -te weggelassen wird. Die übrigen bezeichne man mit $(\varrho_{k_1}, \varrho_0), (\varrho_{k_1}, \varrho_1), \dots, (\varrho_{k_1}, \varrho_{i-1})$, allgemein $(\varrho_{k_1}, \varrho_{k_2})$. Ebenso wie die Abschnitte (ϱ_{k_1}) behandle man nun die Abschnitte $(\varrho_{k_1}, \varrho_{k_2})$, indem man jeden Abschnitt aufs Neue in $2i - 1$ Teile zerlegt usw. Nach n Schritten hat man die $(i-1)^{n-1}$ Abschnitte $(\varrho_{k_1}, \varrho_{k_2}, \dots, \varrho_{k_n})$, wo ϱ_{k_1} die Werte 1, 2, ..., $i-1$, die übrigen die Werte 0, 1, ..., $i-1$ durchlaufen.

Betrachtet man nun die Menge S der Punkte, welche man durch weitere Untereinteilung bekommt, so lässt sich in einfacher Weise beweisen, dass die Abbildung der Elemente der Klasse C_a : $a = \pi^a (\varrho_{k_1} + \varrho_{k_2} \pi + \varrho_{k_3} \pi^2 + \dots)$ für festes a auf die Elemente $(\varrho_{k_1}, \varrho_{k_2}, \dots)$ von S eine eindeutige und beiderseits stetige ist. Weil die auf der Strecke C_a konstruierte Menge S mit dem CANTORSchen Diskontinuum homöomorph ist, so ist auch die Klasse von Elementen $a = \pi^a (\varrho_{k_1} + \varrho_{k_2} \pi + \varrho_{k_3} \pi^2 + \dots)$ für festes a dem CANTORSchen Diskontinuum homöomorph, also insbesondere kompakt. Es gilt also der

Satz II: *Die Klassen eines im Kleinen kompakten nichtarchimedisch bewerteten Körpers sind kompakt.*

Der Körper K aller Elemente $a = \pi^a (\varrho_{k_1} + \varrho_{k_2} \pi + \varrho_{k_3} \pi^2 + \dots)$ ist also kompakt im Kleinen.

Damit sind wir imstande, alle im Kleinen kompakten nichtarchimedisch bewerteten Körper K zu bestimmen. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

1. K ist von der Charakteristik p .
2. K ist von der Charakteristik o .

1. Ist K von der Charakteristik p und \mathfrak{R} der endliche Körper der Restklassen, so ist $K \sim \overline{\mathfrak{R}(x)}$ der einzige mögliche diskret bewertete Körper mit Restklassenkörper \mathfrak{R} ¹⁰⁾, also der einzige mögliche diskret bewertete im Kleinen kompakte Körper K von der Charakteristik p mit dem Restklassenkörper \mathfrak{R} .

$K = \overline{\mathfrak{R}(x)}$ ist der Körper aller Potenzreihen $a = \varrho_s x^s + \varrho_{s+1} x^{s+1} + \varrho_{s+2} x^{s+2} + \dots$ in einer Unbestimmten x ; $\varrho_i \in \mathfrak{R}$, $\varrho_s \neq 0$, $|\varrho_i| = 1$, $|a| = |x|^s$, $|x| < 1$.

Ist die Anzahl der Elemente $\varrho_i \in \mathfrak{R}$ gleich p^n , so ist der Grad von \mathfrak{R} hinsichtlich des Primkörpers K_p der Restklassen mod p gleich n . Ist $q = p^n$, so sind alle Elemente von \mathfrak{R} Wurzeln der Gleichung $x^q - x = 0$.

Damit ist der einzige mögliche Typus der im Kleinen kompakten bewerteten Körper von der Charakteristik p bestimmt.

Satz III: *Die einzige möglichen im Kleinen kompakten nichtarchimedisch bewerteten Körper von der Charakteristik p sind von der Gestalt $K = \overline{\mathfrak{R}(x)}$; sie sind also die vollständige Hülle eines einfachen transzendenten Erweiterung von \mathfrak{R} , in der \mathfrak{R} einen endlichen Körper darstellt.*

2. K sei von der Charakteristik o . Wir lassen dieser Behandlung zwei Hilfssätze vorangehen:

Hilfssatz I: Eine endliche algebraische Erweiterung $K(\alpha)$ eines im Kleinen kompakten bewerteten Körpers K ist im Kleinen kompakt.

¹⁰⁾ HASSE und SCHMIDT, Die Struktur diskret bewerteter Körper, J. f. d. r. u. ang. Math. 170 (1934).

Beweis: Die endlichen algebraischen Erweiterungen vollständiger bewerteter Körper sind vollständig¹¹⁾. Weil K diskret bewertet ist, ist auch $K(\alpha)$ diskret bewertet. $K(\alpha)$ besitzt ausserdem einen endlichen Index. Ist nämlich i der Index, π Primelement von K , π^* Primelement von $K(\alpha)$, dessen Definitionsgleichung den Grad λ hat und $\pi^{*e} \sim \pi$, so ist der Index von $K(\alpha)$: $i' = if$, worin $e \cdot f = \lambda$ ¹²⁾. Diese drei Bedingungen sind hinreichend dafür, dasz $K(\alpha)$ im Kleinen kompakt ist.

Hilfssatz II: Sei $K(x)$ eine einfache transzendenten Erweiterung eines im Kleinen kompakten bewerteten Körpers K , so ist die vollständige Hülle $\overline{K(x)}$ von $K(x)$ nicht im Kleinen kompakt. Besitzt nämlich K die Elemente $a = \varrho_a \pi^a + \varrho_{a+1} \pi^{a+1} + \dots$, so haben die Elemente von $\overline{K(x)}$ die Gestalt: $a = ax^s + a' x^{s+1} + a'' x^{s+2} + \dots$.

$\overline{K(x)}$ hat also keinen endlichen Index und ist demnach nicht im Kleinen kompakt.

Wir können nun die im Kleinen kompakten Körper K von der Charakteristik o bestimmen. Alle diese Körper müssen den im Kleinen kompakten HENSELschen Körper \bar{K}_0 der rationalen p -adischen Zahlen enthalten.

Jeden Körper bekommt man aus seinem Primkörper durch eine transzendenten und eine darauffolgende algebraische Erweiterung. Aus den beiden Hilfssätzen lässt sich sofort schlieszen:

Satz IV: Die einzige möglichen im Kleinen kompakten nichtarchimedisch bewerteten Körper von der Charakteristik o sind die endlichen algebraischen Erweiterungen des HENSELschen Körpers \bar{K}_0 der rationalen p -adischen Zahlen.

¹¹⁾ OSTROWSKI, Zur Theorie der perfekten Körper, J. f. d. r. u. ang. Math. 147 (1917).

¹²⁾ K. HENSEL, Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1908, S. 146.

Mathematics. — *Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im R_4 . (Dreizehnte Mitteilung.) Von W. J. Bos. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK.)*

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

Für die Hyperfläche W_3^4 , der wir in der vorigen Mitteilung begegneten, werden wir hier noch zwei andere Darstellungen ableiten. Dabei wird sich, analog mit VIc (vgl. § 34), ergeben, dass jede Vierpunktebene die Fläche W_3^4 in einem doppelt zu zählenden Kegelschnitte schneidet. Schliesslich behandeln wir die Fünf- und Sechspunktebenen.

§ 35.

Wir betrachten den $R_3 v'$ bestimmt durch die Erzeugende 0_{ik} und die zwei Punkte y und z :

$$(v' x) = (0^2 yzx) = 0. \dots \dots \dots \quad (313)$$

Dieser Raum v' schneidet F in der Erzeugenden 0_{ik} und in einer Kurve $C_{v'}$ gegeben durch:

$$C_{v'} = 1_{v'} 1_{u'} + \frac{t}{2!} \cdot 2_{v'} 2_{u'} + \frac{t^2}{3!} \cdot 3_{v'} 3_{u'} + \dots$$

Die Oskulationsebene dieser Kurve für $t = 0$ ist eine Vierpunktebene und hat die Gleichung

$$(123 \pi^2) 1_{v'} 2_{v'} 3_{v'} = 0,$$

oder:

$$(1^2 23 \pi) 2_{v'} 3_{v'} \pi_{v'} = (1^2 23 \pi) (20^2 yz) (30^2 yz) (\pi 0^2 yz) = 0.$$

Umgekehrt kann man jede Vierpunktebene, ausgenommen die Vierpunktebenen A und B , auf diese Weise erhalten.

Der Punkt y liegt in dieser Ebene wenn

$$T_{yz} = (1^2 23 y) (20^2 yz) (30^2 yz) = 0. \dots \dots \quad (314)$$

Bei einem gegebenen Punkte y gibt $T_{yx} = 0$ die Punkte x , die mit y und 0_{ik} verbunden, einen R_3 bilden, worin eine Vierpunktebene gelegen ist, welche den Punkt y enthält. Da der Polarraum jedes Punktes in Bezug auf die Hyperquadrik mit der Gleichung $T_{yx} = 0$ durch die Ebene $(0^2 y)_{ikl}$ geht, ist diese Hyperquadrik ausgeartet in zwei lineare Räume.

$T_{yx} = 0$ ist also die Gleichung der zwei Verbindungsräume der beiden Vierpunktebenen durch y mit der Erzeugenden 0_{ik} .

Seien s und t zwei willkürliche Punkte, dann liegt der Punkt $P_\lambda = s + \lambda \cdot t$ auf der Hyperquadrik wenn

$$(1^2 23 y) (20^2 ys) (30^2 ys) + \lambda \{ (1^2 23 y) (20^2 ys) (30^2 yt) + \} + (1^2 23 y) (20^2 yt) (30^2 ys) \} + \lambda^2 \cdot (1^2 23 y) (20^2 yt) (30^2 yt) = 0. \quad (315)$$

Die Hyperquadrik ist ein Doppelraum, wenn die Diskriminante dieser Gleichung in λ verschwindet (für alle s und t).

Schreiben wir statt (315)

$$(s, s) + \lambda \{ (s, t) + (t, s) \} + \lambda^2 \cdot (t, t) = 0. \dots \dots \quad (316)$$

dann lautet die genannte Bedingung:

$$D_{st} = (s, t)^2 + 2(s, t)(t, s) + (t, s)^2 - 4(s, s)(t, t) \equiv 0 \{s, t\}. \quad (317)$$

Bringen wir in

$$(s, t) = (1^2 23 y) (20^2 ys) (30^2 yt)$$

die 3 aus dem dritten in den zweiten Faktor, dann entsteht

$$(s, t) = (t, s) + (1^2 23 y) (0^2 23 y) \cdot (0^2 yst),$$

und also wenn wir für den letzten Term P schreiben:

$$(s, t) - (t, s) = P.$$

Damit wird

$$D_{st} = P^2 + 4(s, t)(t, s) - 4(s, s)(t, t). \quad \dots \quad (318)$$

Bringen wir nun in

$$(s, t)(t, s) = (1^2 23 y) (20^2 ys) (30^2 yt) \cdot (1^2 23 y) (20^2 yt) (30^2 ys)$$

die 3 aus dem letzten in den dritten Faktor:

$$(s, t)(t, s) = (s, s)(t, t) - (1^2 23 y) (20^2 ys) (30^2 y) (1^2 23 y) (20^2 yt) \cdot (0^2 yst).$$

Beim zweiten Term wird 2 aus dem fünften in den zweiten Faktor gebracht und man findet:

$$(s, t)(t, s) = (s, s)(t, t) - \frac{1}{2} (1^2 23 y) (20^2 y) (30^2 y) (1^2 23 y) \cdot \{(0^2 yst)\}^2.$$

Damit bekommt man schliesslich statt (317):

$$D_{st} = \left[\{(0^2 23 y) (1^2 23 y)\}^2 - 2(0^2 23 y) (0^2 33 y) (1^2 23 y) (1^2 23 y) \right] \cdot \{(0^2 yst)\}^2 = 0. \quad (319)$$

Genügt also y der Gleichung

$$(v' x)^4 = \{(0^2 23 x) (1^2 23 x)\}^2 - 2(0^2 23 x) (0^2 33 x) (1^2 23 x) (1^2 23 x) = 0 \quad (320)$$

dann ist $T_{yx} = 0$ die Gleichung eines Doppelraumes.

(320) gibt also die Punkte wodurch nur eine Vierpunkt ebene geht, d.h. die Punkte der Hyperfläche W_3^4 des § 34. Die Kovarianten $(v' x)^4$ und $(w' x)^4$ (Gl. (293)) sind also bis auf einen Faktor gleich.

Berechnet man die Polare $\Delta_{xH}(v' x)^4$, dann findet man mit Hilfe der Gleichung (299) die Beziehung:

$$(w' x)^4 = 144 Q^2 \cdot (v' x)^4. \quad \dots \quad (321)$$

Betrachten wir nun in T_{yz} (314) den Punkt z als gegeben und nehmen wir an, dass z nicht im Tangentialraume und nicht im Beiraume liegt, dann ist $T_{xz} = 0$ die Gleichung in Punktkoordinaten der Mannigfaltigkeit der ∞^1 Vierpunkt ebene S , deren Verbindungs räume mit 0_{ik} durch z gehen; der Vierpunkt ebene also, welche mit der Ebene e :

$$(e^3 \pi^2) = (0^2 z \pi^2) = 0$$

in einem R_3 liegen. T_{xz} ist in x vom dritten Grade, eine willkürliche Gerade schneidet also drei der Ebenen S .

Wir haben also ein System S von ∞^1 Ebenen; jede Ebene liegt mit e in einem R_3 und eine Gerade schneidet im Allgemeinen drei der Ebenen. Da wir annahmen, dass z nicht im Tangentialraume und nicht im Beiraume gelegen ist, wissen wir nach der Eig. IV* ausserdem, dass keine zwei der Ebenen S einem R_3 angehören.

Ein solches Ebenensystem ist das duale Gebilde der allgemeinen Regelfläche F_2^3 dritten Grades. (Vgl. Mitt. 6, § 20 und § 21.)

Bei der allgemeinen Regelfläche F^3 haben wir Folgendes:

Betrachten wir das System T der Heftebenen von F_2^3 , d.h. der Verbindungsebenen der Erzeugenden mit der Leitlinie, dann enthält ein Raum R_3 durch die Leitlinie im Allgemeinen zwei verschiedene Erzeugenden und also auch zwei verschiedene Heftebenen T . Es gibt aber eine nicht-ausgeartete eindimensionale kwadratische Mannigfaltigkeit von Räumen, wofür diese beiden Erzeugenden und also auch die zugehörigen Ebenen T zusammenfallen (die Tangentialräume $x_{02} = 0$ der Fläche (195), (204)). Jede Ebene T liegt in einem solchen Raum, nämlich im Tangentialraume längs der Erzeugende in T .

Hiermit dual haben wir jetzt:

Die ∞^1 Vierpunktebenen S schneiden die Ebene e in ∞^1 Geraden p . Durch einen Punkt in e gehen im Allgemeinen zwei Vierpunktebenen S und also zwei Geraden p . Die Punkte in e aber, wofür diese beiden Ebenen zusammenfallen (Punkte auf W_3^4) liegen auf einem nicht-ausgearteten Kegelschnitte K . Jede Gerade p enthält nur einen Punkt von K : die Geraden p sind also Tangenten von K . Wir haben somit gefunden:

Jede Ebene e durch 0_{ik} , die nicht im Tangentialraume oder in Beiraume liegt, schneidet W_3^4 in der doppelt zu zählenden Erzeugenden 0_{ik} und in einem nicht-ausgearteten Kegelschnitte K . Die Vierpunktebenen, die mit der Ebene e in einem R_3 liegen, schneiden diese Ebene in den Tangenten des Kegelschnittes K . Liegt e aber im Tangentialraume, dann ist der Durchschnitt die vierfache Erzeugende 0_{ik} , während eine Ebene e im Beiraume die Fläche W_3^4 in einem doppelt zu zählenden Geradenpaar schneidet, zusammengestellt aus 0_{ik} und der Schnittgerade der Ebene e mit der Ebene Hg . (Vgl. VI b_2^*).

Für jede Vierpunktebene v , ausgenommen die Vierpunktebenen A und B , gilt nun Folgendes:

Sei P der Schnittpunkt von v mit 0_{ik} und l eine Gerade durch P in v , dann schneidet die Ebene e durch l und 0_{ik} die Hyperfläche W_3^4 in 0_{ik} (doppelt) und in einem Kegelschnitte K . Wenn K nicht ausgeartet ist, dann ist, wie wir zeigten, l eine Tangente von K . Die Gerade l schneidet dann W_3^4 in einem doppelt zu zählenden Punktpaar. K zerfällt nur wenn l die Schnittgerade von v mit dem Tangentialraume oder mit dem Beiraume ist. Im ersten Falle schneidet l die Fläche W_3^4 in P (vierfach), im zweiten Falle in P (zweifach) und im Schnittpunkte von v mit der Beigerade g_{ik} (zweifach). Wir erhalten also das Resultat:

Vlc*. Eine Vierpunktebene v schneidet die Hyperfläche W_3^4 in einem doppelt zu zählenden Kegelschnitte K durch die Schnittpunkte von v mit der Erzeugenden 0_{ik} und mit der Beigeraden g ; die Tangente des Kegelschnittes im erstgenannten Schnittpunkte ist die Schnittgerade von v mit dem Tangentialraume der Fläche F längs der Erzeugende 0_{ik} .

Der Kegelschnitt K ist dann und nur dann ausgeartet, wenn v zu den Vierpunktebenen A oder B gehört; im ersten Falle ist K die doppelt zu zählende Gerade HG , im zweiten Falle ist K zusammengestellt aus der Heftegeraden α_{ik} und der Schnittgerade von v mit der Ebene Hg .

§ 36.

Wir werden jetzt noch eine dritte und einfachste Darstellung der Hyperfläche W_3^4 geben.

Dazu suchen wir die beiden Ebenen, welche den vier linearen Ebenenkomplexen 0_{ik} , 1_{ik} , 2_{ik} und 3_{ik} angehören und durch einen Punkt x gehen. Die Bedingung, dass diese beiden Ebenen zusammenfallen, gibt uns dann die Fläche W_3^4 zurück.

Zum Zwecke grösserer Anschaulichkeit geben wir aber die duale Ableitung.

Wir betrachten also vier Linienkomplexe $(1)K$, $(2)K$, $(3)K$ und $(4)K$ im R_4 mit den Gleichungen

$$(n)K = (n)K' \cdot \pi)^2 = 2 \sum (n)K'_{st} \cdot \pi_{st} = 0 \quad (n=1, 2, 3, 4) \quad (s, t=1, 2, \dots, 5) \quad (322)$$

und fragen nach der Gleichung der beiden Geraden in einem $R_3 v'$:

$$(v' x) = \sum v'_s \cdot x_s = 0, \dots \quad (323)$$

welche allen vier ${}_{(n)}K$ angehören.

Die Geraden des Komplexes ${}_{(1)}K$, welche im Raum v' gelegen sind, bilden einen linearen Strahlenkomplex. Die ${}_{(n)}K$ bestimmen also im Raum v' vier dreidimensionalen Komplexe ${}_{(n)}k$, deren Gleichungen wir schreiben können:

$${}_{(n)}k = ({}_{(n)}k' \varphi)^2 = 2 \sum {}_{(n)}k'_{\varrho\sigma} \cdot \varphi_{\varrho\sigma} = 0 \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, 3, 4) \quad (324)$$

wobei die $\varphi_{\varrho\sigma}$ Linienkoordinaten im Raum v' darstellen.

Setzen wir weiter

$$A_{mn} = ({}_{(m)}k' {}_{(n)}k') = 2 ({}_{(m)}k' {}_{(n)}k)^2 = 4 \sum {}_{(m)}k'_{\varrho\sigma} \cdot {}_{(n)}k'_{\varrho\sigma}, \dots \quad (325)$$

dann lautet bekanntermassen die Gleichung der beiden Geraden, welche den vier ${}_{(n)}k$ angehören:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & ({}_{(1)}k' \pi)^2 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & ({}_{(2)}k' \pi)^2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & ({}_{(3)}k' \pi)^2 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & ({}_{(4)}k' \pi)^2 \\ ({}_{(1)}k' \pi)^2 & ({}_{(2)}k' \pi)^2 & ({}_{(3)}k' \pi)^2 & ({}_{(4)}k' \pi)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (326)$$

und diese Geraden fallen zusammen wenn

$$D = |A_{mn}| = 0, \dots \quad (327)$$

Es handelt sich nun weiter darum, die Größen A_{mn} in den Koordinaten der vier Komplexe ${}_{(n)}K$ und des Raumes v' auszudrücken.

Dazu denken wir uns v' bestimmt durch die vier Punkte ${}_{(1)}P$, ${}_{(2)}P$, ${}_{(3)}P$ und ${}_{(4)}P$ mit den Gleichungen

$$({}_{(e)}Pu') = \sum {}_{(e)}P_s \cdot u'_s = 0, \dots \quad (328)$$

Dann ist

$$v'_s = ({}_{(1)}P {}_{(2)}P {}_{(3)}P {}_{(4)}P)_s, \dots \quad (329)$$

und für zwei willkürliche Punkte ${}_{(\lambda)}P$ und ${}_{(\mu)}P$ im Raum v' haben wir die Darstellung

$${}_{(\lambda)}P_s = \lambda_1 \cdot {}_{(1)}P_s + \lambda_2 \cdot {}_{(2)}P_s + \dots + \lambda_4 \cdot {}_{(4)}P_s = \sum_{\varrho} \lambda_{\varrho} \cdot {}_{(e)}P_s$$

$${}_{(\mu)}P_s = \dots \dots \dots \dots \dots \dots = \sum_{\varrho} \mu_{\varrho} \cdot {}_{(e)}P_s$$

Die zehn Größen

$$\pi_{st} = ({}_{(\lambda)}P {}_{(\mu)}P)_{st} = \sum_{\varrho\sigma} (\lambda \mu)_{\varrho\sigma} ({}_{(e)}P)_{st} \quad \dots \quad (330)$$

sind die vierdimensionalen Linienkoordinaten der Geraden ${}_{(\lambda)}P {}_{(\mu)}P$, während die sechs Größen

$$(\lambda \mu)_{\varrho\sigma} = \varphi_{\varrho\sigma} \quad \dots \quad (331)$$

die dreidimensionalen Linienkoordinaten dieser Geraden sind.

Die Gerade ${}_{(\lambda)}P {}_{(\mu)}P$ gehört dem Komplexe ${}_{(1)}K$ an, wenn

$$\sum_{st} {}_{(1)}K'_{st} ({}_{(\lambda)}P {}_{(\mu)}P)_{st} = \sum_{\varrho\sigma} \varphi_{\varrho\sigma} \left\{ \sum_{st} ({}_{(e)}P)_{st} \cdot {}_{(1)}K'_{st} \right\} = \sum_{\varrho\sigma} \varphi_{\varrho\sigma} ({}_{(1)}K' {}_{(e)}P) ({}_{(1)}K' {}_{(e)}P)$$

verschwindet.

Also können wir schreiben

$${}_{(1)}k'_{\varrho\sigma} = ({}_{(1)}K' {}_{(\varrho)}P) ({}_{(1)}K' {}_{(\sigma)}P)$$

und ebenso

$${}_{(n)}k'_{\varrho\sigma} = ({}_{(n)}K' {}_{(\varrho)}P) ({}_{(n)}K' {}_{(\sigma)}P). \dots \dots \dots \quad (332)$$

Damit erhalten wir z.B.:

$$A_{12} = 4 \sum {}_{(1)}k'_{\varrho\sigma} \cdot {}_{(2)}k'_{\varrho\sigma} = ({}_{(1)}k' {}_{(2)}k' {}^2) = \begin{vmatrix} ({}_{(1)}K' {}_{(1)}P) & ({}_{(1)}K' {}_{(2)}P) & ({}_{(1)}K' {}_{(3)}P) & ({}_{(1)}K' {}_{(4)}P) \\ ({}_{(1)}K' {}_{(1)}P) & ({}_{(1)}K' {}_{(2)}P) & ({}_{(1)}K' {}_{(3)}P) & ({}_{(1)}K' {}_{(4)}P) \\ ({}_{(2)}K' {}_{(1)}P) & ({}_{(2)}K' {}_{(2)}P) & ({}_{(2)}K' {}_{(3)}P) & ({}_{(2)}K' {}_{(4)}P) \\ ({}_{(2)}K' {}_{(1)}P) & ({}_{(2)}K' {}_{(2)}P) & ({}_{(2)}K' {}_{(3)}P) & ({}_{(2)}K' {}_{(4)}P) \end{vmatrix}$$

Oder wegen (329):

$$A_{12} = ({}_{(1)}K' {}^2 {}_{(2)}K' {}^2 v') = (S_{12} v') \dots \dots \dots \quad (333)$$

Also erhält man statt (327):

$$D = |(S_{mn} v')|, \dots \dots \dots \quad (334)$$

wobei

$$S_{mn} = ({}_{(m)}K' {}^2 {}_{(n)}K' {}^2).$$

Die duale Betrachtung gibt bei der Regelfläche F die Punkte x , mit der Eigenschaft, dass die zwei Ebenen durch x , welche den vier Ebenenkomplexen 0_{ik} , 1_{ik} , 2_{ik} und 3_{ik} angehören, zusammenfallen; d.h. die Punkte wodurch nur eine Vierpunktebene geht.

Wegen $x_{00} \equiv 0$, $x_{01} \equiv 0$ finden wir also die folgende *dritte Darstellung der Hyperfläche W_3^4* :

$$(s' x)^4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x_{02} & x_{03} \\ 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = 0. \dots \dots \quad (335)$$

Mit Hilfe der Polare $\Delta_{xH}(s' x)^4$ bekommt man durch Vergleichung mit (299) die Beziehung:

$$(w' x)^4 = 144 \cdot Q^2 (v' x)^4 = 9 \cdot Q^2 (s' x)^4. \dots \quad (336)$$

Für jeden Punkt x gibt ferner

$$L_{x\pi} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x_{02} & x_{03} & x_{0\pi} \\ 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{1\pi} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{2\pi} \\ x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{3\pi} \\ x_{0\pi} & x_{1\pi} & x_{2\pi} & x_{3\pi} & 0 \end{vmatrix} = 0. \dots \quad (337)$$

die zwei Vierpunktebenen durch x in der Gestalt eines speziellen quadratischen Linienkomplexes.

Ganz analoge Betrachtungen geben für die Bedingung, dass durch den Punkt x eine Ebene geht, welche den fünf Ebenenkomplexen 0_{ik} , 1_{ik} , 2_{ik} , 3_{ik} und 4_{ik} angehört:

$$V_3^5 = (f' x)^5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x_{02} & x_{03} & x_{04} \\ 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{40} & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad \dots \quad (338)$$

Dies ist also die *Gleichung in Punktkoordinaten der Mannigfaltigkeit V_3^5 der ∞^1 Fünfpunktebenen*.

Wie bei den Vierpunktebenen ist dieses Resultat in Uebereinstimmung mit den Erwartungen. C. SEGRE bewies nämlich ¹⁾, dass die ∞^1 Ebenen, welche fünf Geraden allgemeiner Lage im R_4 schneiden, eine Mannigfaltigkeit V_3^5 fünften Grades bilden.

§ 37.

Die Sechspunktebenen ϕ erhalten wir der Mitteilung 11 gemäss indem wir den neun homogenen Parameter λ_i der Gleichung (275) die acht Bedingungen

$$(277a), (277b), (277c), (\phi_1), (\phi_2), (\phi_3), (\phi_4), \text{ und } (\phi_5)$$

auferlegen.

Mit Hilfe der ersten sechs dieser Beziehungen können wir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$ und λ_7 ausdrücken in λ_4, λ_8 und λ_9 . Einsetzung dieser Werte in die Relationen (ϕ_4) und (ϕ_5) gibt sodann zwei Gleichungen dritten Grades in λ_4, λ_8 und λ_9 , die aber beide nur linear in λ_4 sind.

In der projektiven Ebene bestimmt durch λ_4, λ_8 und λ_9 haben wir also zwei Kurven dritten Grades. Der Punkt $\lambda_8 = 0, \lambda_9 = 0$ ist ein Doppelpunkt der beiden Kurven, sodass diese Kurven im Allgemeinen fünf weitere Schnittpunkte haben ²⁾. Die Werte $\lambda_8 = 0, \lambda_9 = 0$ geben uns wegen § 32 keine Sechspunktebenen; wir haben also:

Es gibt höchstens fünf Sechspunktebenen.

Für die fünf Schnittpunkte dieser Ebenen mit der Erzeugende 0_{ik} können wir mit Hilfe der Methode des vorigen § auf die folgende Weise eine Darstellung erhalten.

Die Gleichung jedes Punktes S von 0_{ik} kann man in der Gestalt schreiben:

$$S = 0_{u'} 0_{22} + v \cdot 0_{u'} 0_{23} = 0.$$

Dieser Punkt S liegt in einer Sechspunktebene, wenn es eine Ebene durch S gibt, welche den fünf Ebenenkomplexen $1_{ik}, 2_{ik}, 3_{ik}, 4_{ik}$ und 5_{ik} angehört. Wegen (338) bekommen wir dann die folgende Gleichung fünften Grades für v :

$$|0_{mn} 0_{22} + v \cdot 0_{mn} 0_{23}| = 0, \quad (m, n = 1, 2, 3, 4, 5) \quad \dots \quad (239)$$

¹⁾ Rend. Palermo, T. II, 51—52, (1888).

²⁾ Betreffs dieser Konstruktion vgl. R. WEITZENBÖCK, Wiener Berichte, 121, 2553—2575, (1912).

Mathematics. — *Sur l'existence et la construction des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du quatrième ordre.* Par H. BREMEKAMP. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

Dans une note précédente nous nous sommes occupés de l'unicité des solutions de l'équation $\alpha\Delta\Delta u + 2\beta\Delta u + \gamma u = 0$, quand en tout point d'une courbe fermée u et Δu , ou u et $\frac{\partial u}{\partial n}$ sont donnés. Maintenant nous allons démontrer l'existence de ces solutions sous les mêmes conditions. Cette démonstration se fait par une méthode d'approximations successives due en principe à M. E. PICARD et repose sur l'existence des solutions de l'équation $\Delta\Delta u = 0$ satisfaisant aux mêmes conditions. Celle-là a été établie par M. G. LAURICELLA¹). Aux §§ 3, 5 et 6 nous en donnons une autre démonstration.

§ 1. Nous écrirons l'équation considérée sous la forme

$$\Delta\Delta u + 2\beta\Delta u + \gamma u = 0. \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

Il s'agit de démontrer qu'elle a toujours une solution valable dans tout l'intérieur d'une courbe donnée C , fermée, sans points doubles et ayant une tangente déterminée en chacun de ses points, si en tout point de cette courbe sont donnés ou 1° u et Δu , ou 2° u et $\frac{\partial u}{\partial n}$.

Il faudra introduire encore une condition analogue à celle introduite par PICARD dans sa théorie de l'équation $\Delta u + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u = 0$, mais à cette condition il sera certainement satisfait, si la courbe C est située entièrement à l'intérieur d'un certain domaine à désigner d'avance.

Nous commençons par la solution de l'équation

$$\Delta\Delta u = \varphi(x, y). \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

valable à l'intérieur de C et telle que sur $Cu = 0$ et $\Delta u = 0$.

À cet effet nous introduisons une fonction de GREEN $G(P, P')$, définie comme il suit: (les coordonnées de P sont (x, y) , celles de P' (x', y') , l'opérateur Δ se rapporte à x, y) 1°. $\Delta\Delta G(P, P') = 0$ pour tout point P , à l'intérieur de la courbe C ou sur C , différents de P' . 2°. $G(P, P') = r^2 \ln r$, où $r = PP'$, a ses dérivées du quatrième ordre continues, quand $P' \rightarrow P$, cette fonction, que nous appellerons $g(P, P')$, satisfait donc en tout point intérieur à C ou sur C à $\Delta\Delta g = 0$. 3°. $G(P, P')$ et $\Delta G(P, P')$ tendent vers zéro pour tout point P' à l'intérieur de C , si P' s'approche indéfiniment du contour.

La solution cherchée est alors

$$u = \frac{1}{8\pi} \int \varphi(x', y') G(P, P') d\sigma'. \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

En effet de la définition de G il suit directement que $u = 0$, quand P est sur C et aussi,

¹⁾ Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Acta Mathematica 32, 1909, et Sulla integrazione dell' equazione $\Delta^4 V = 0$. Rendiconti della Reale Acc. dei Lincei, serie 5, T XVI, 1907.

parce que $\Delta u = \frac{1}{8\pi} \int \varphi(x', y') \Delta G(P, P') d\sigma'$, $\Delta u = 0$, quand P est sur C . Puis, écrivant

$$\Delta u = \frac{1}{8\pi} \int \varphi(x', y') (4 \ln r + 4 + \Delta g) d\sigma'.$$

nous en déduisons par un raisonnement bien connu

$$\Delta \Delta u = \varphi(x, y)$$

pour tout point intérieur à C .

§ 2. Nous allons d'abord faire voir, que nous pouvons en effet déterminer la fonction G . Il s'agit naturellement de démontrer, qu'on peut déterminer la fonction g pour un point quelconque P' à l'intérieur de C , satisfaisant à $\Delta \Delta g = 0$, tandis que, quand P tend vers un point de C , $\Delta g \rightarrow -4 \ln r - 4$ et $g \rightarrow -r^2 \ln r$. Posons à cet effet $g = v + w$, où $\Delta v = 0$ et $\Delta w = t$ et déterminons t de sorte que $\Delta t = 0$ et, quand P tend vers un point de C , $t \rightarrow -4 \ln r - 4$. D'après la théorie de l'équation de LAPLACE cette fonction t existe. La fonction $w = \frac{1}{2\pi} \int \ln r t d\sigma$ satisfait alors à $\Delta w = t$, donc on a sur C $\Delta w = -4 \ln r - 4$, puis posons sur C $w = w_s$. Ensuite nous déterminons v de sorte que $\Delta v = 0$ et, quand P tend vers un point de C , $v \rightarrow -w_s - r^2 \ln r$. On aura alors $\Delta g = \Delta w = t$, donc $\Delta \Delta g = \Delta t = 0$ et, quand P tend vers un point de C ,

$$\Delta g = t \rightarrow -4 \ln r - 4 \text{ et } g \rightarrow -r^2 \ln r.$$

On a alors, Φ étant le maximum de $\frac{|\varphi(x', y')|}{8\pi}$ dans le domaine considéré,

$$|u| < \Phi \int |G(P, P')| d\sigma'.$$

Cette intégrale dépend de la position de P , mais quand P parcourt le domaine considéré elle atteint un certain maximum M , qui tend vers zéro, quand le champ d'intégration, c'est à dire l'aire intérieure à la courbe C , tend vers zéro. Nous avons donc

$$|u| < \Phi M. \quad \dots \quad (4)$$

De même nous trouverons

$$|\Delta u| < \Phi N, \quad \dots \quad (5)$$

où N aussi tend vers zéro, quand l'aire intérieure à C tend vers zéro.

§ 3. La fonction G nous servira aussi pour construire la solution de $\Delta \Delta u = 0$, valable à l'intérieur de C et telle que sur C $u = f_1$, $\Delta u = f_2$, f_1 et f_2 étant des fonctions données de la position du point P sur C .

En appliquant la formule de GREEN

$$\int v \Delta u d\sigma - \int u \Delta v d\sigma = \int v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int u \frac{\partial v}{\partial n} ds$$

pour $v = \Delta u'$, nous trouvons

$$\int \Delta u \Delta u' d\sigma = \int u \Delta \Delta u' d\sigma + \int \Delta u' \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int u \frac{\partial \Delta u'}{\partial n} ds.$$

De même

$$\int \Delta u \Delta u' d\sigma = \int u' \Delta \Delta u d\sigma + \int \Delta u \frac{\partial u'}{\partial n} ds - \int u' \frac{\partial \Delta u}{\partial n} ds.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int u \Delta \Delta u' d\sigma - \int u' \Delta \Delta u d\sigma = \\ + \int \left(u \frac{\partial \Delta u'}{\partial n} - u' \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right) ds + \int \left(\Delta u \frac{\partial u'}{\partial n} - \Delta u' \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \end{aligned}$$

Dans cette formule nous prendrons $u' = r^2 \ln r$ et nous étendrons les intégrales au domaine entre C et une circonference de rayon R ayant comme centre le point P d'où nous comptons r , pour u nous prendrons une fonction satisfaisant à l'intérieur de C à $\Delta \Delta u = 0$. Il vient alors

$$\begin{aligned} 0 = \int \left(u \frac{\partial \Delta r^2 \ln r}{\partial n} + \Delta u \frac{\partial r^2 \ln r}{\partial n} \right) ds - \int \left(r^2 \ln r \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + \Delta r^2 \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds - \\ - 4 \int_0^{2\pi} u d\vartheta - (2R^2 \ln R + R) \int_0^{2\pi} \Delta u d\vartheta + R^3 \ln R \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Delta u}{\partial r} d\vartheta + 4(R \ln R + R) \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} d\vartheta, \end{aligned}$$

donc, faisant tendre R vers zéro,

$$8\pi u_P = \int \left(u \frac{\partial \Delta r^2 \ln r}{\partial n} + \Delta u \frac{\partial r^2 \ln r}{\partial n} \right) ds - \int \left(r^2 \ln r \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + \Delta r^2 \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

Or nous avons

$$G = r^2 \ln r + g$$

et

$$0 = \int \left(u \frac{\partial g}{\partial n} + \Delta u \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds - \int \left(g \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + \Delta g \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

Donc

$$8\pi u_P = \int \left(u \frac{\partial G}{\partial n} + \Delta u \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad \dots \quad (6)$$

De la même manière que pour l'équation de LAPLACE nous pouvons démontrer, que la fonction ainsi construite satisfait à toutes les conditions posées.

§ 4. Nous construisons maintenant la solution de

$$\Delta \Delta u + 2\beta \Delta u + \gamma u = 0,$$

satisfaisant sur C à $u = f_1$, $\Delta u = f_2$,

comme il suit.

Nous déterminons u_0 tel que

$$\Delta \Delta u_0 = 0 \quad \text{et sur } C \quad u_0 = f_1, \quad \Delta u_0 = f_2,$$

$$u_1 \text{ tel que } \Delta \Delta u_1 = -2\beta u_0 - \gamma u_0 \text{ et sur } C \quad u_1 = f_1, \quad \Delta u_1 = f_2,$$

$$u_2 \text{ tel que } \Delta \Delta u_2 = -2\beta u_1 - \gamma u_1 \text{ et sur } C \quad u_2 = f_1, \quad \Delta u_2 = f_2,$$

et ainsi de suite.

Posant

$$u_0 = v_0, \quad u_k - u_{k-1} = v_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

nous avons

$$\Delta \Delta v_k = -2\beta v_{k-1} - \gamma v_{k-1} \text{ et sur } C \quad v_k = 0, \quad \Delta v_k = 0.$$

La détermination des fonctions v_0 et v_k rentre dans ce qui a été exposé au §§ 1 et 3.

Nous avons à démontrer, que $\sum v_k$ est une série convergente. Soit b la valeur maximale de $|2\beta|$ et $|\gamma|$ pour le domaine à l'intérieur de C , et A celle de $|v_0| + |\Delta v_0|$.

Nous avons successivement à cause de (4) et (5)

$$\begin{aligned} |v_1| &< AbM, & |\Delta v_1| &< AbN, & |-2\beta \Delta v_1 - \gamma v_1| &< Ab^2(M+N), \\ |v_2| &< Ab^2(M+N)M, & |\Delta v_2| &< Ab^2(M+N)N, & |-2\beta \Delta v_2 - \gamma v_2| &< Ab^3(M+N)^2, \\ |v_3| &< Ab^3(M+N)^2M, & |\Delta v_3| &< Ab^3(M+N)^2N, & |-2\beta \Delta v_3 - \gamma v_3| &< Ab^4(M+N)^3, \\ &\dots & &\dots & &\dots \\ |v_k| &< Ab^k(M+N)^{k-1}M, \end{aligned}$$

donc, quand $b(M+N) < 1$, la série $\sum v_k$ sera absolument convergente et puisque M et N tendent vers zéro quand l'aire intérieure à C tend vers zéro, à la condition $b(M+N) < 1$ il sera certainement satisfait, si la courbe C est située entièrement à l'intérieur d'un domaine assez petit.

La démonstration, que la fonction $u = \sum v_k$ satisfait à toutes les conditions du problème est alors facile.

§ 5. D'une manière analogue nous traitons le cas, où sur C sont donnés u et $\frac{\partial u}{\partial n}$.

Nous commençons par la solution de $\Delta \Delta u = \varphi(x, y)$, valable à l'intérieur de C et telle que sur C , $u = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, et la solution de $\Delta \Delta u = 0$ telle que sur C , $u = g_1$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = g_2$.

Nous construisons encore une fonction de GREEN $H(P, P')$ déterminée cette fois par

1° $\Delta \Delta H(P, P') = 0$ à l'intérieur de C et sur C si $P \neq P'$.

2° $H(P, P') - r^2 \ln r = h(P, P')$ a ses dérivées du quatrième ordre continues, quand $P \rightarrow P'$, cette fonction satisfait donc partout à l'intérieur de C à $\Delta \Delta h = 0$.

3° $H(P, P')$ et $\frac{\partial H(P, P')}{\partial n}$ tendent vers zéro pour tout point P' à l'intérieur de C , quand P s'approche du contour.

La solution de $\Delta \Delta u = \varphi(x, y)$ telle, que sur C $u = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, est alors

$$u = \frac{1}{8\pi} \int \varphi(x', y') H(P, P') d\sigma'. \quad \dots \quad (7)$$

La solution de $\Delta \Delta u = 0$ telle, que sur C , $u = g_1$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = g_2$, est

$$8\pi u_P = \int \left(u \frac{\partial \Delta H}{\partial n} - \Delta H \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds'. \quad \dots \quad (8)$$

La construction des approximations successives et la démonstration, que ce procédé fournit la solution de l'équation (1) satisfaisant aux donnés sur la courbe C , se font tout comme dans le cas précédent. Il ne s'agit donc encore que de faire voir, qu'on peut déterminer la fonction H , ce qui se réduit à la même question pour la fonction h .

§ 6. Nous posons à cet effet $h = r^2 w + v$ (r étant encore la distance de P au point arbitraire, mais fixe, P' à l'intérieur de C ou sur C) avec $\Delta v = 0$ et $\Delta w = 0$ et nous démontrons qu'alors $\Delta\Delta h = 0$.

Nous avons

$$\Delta h = \Delta(r^2 w + v) = w \Delta r^2 + 4 \left(x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + r^2 \Delta w = 4w + 4r \frac{\partial w}{\partial r},$$

donc

$$\begin{aligned} \Delta\Delta h &= 4\Delta \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \\ &= 4 \left(r \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + 3 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \right) = \\ &= 4 \left\{ r \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + 3 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Puis nous démontrons, que toute fonction satisfaisant à $\Delta\Delta h = 0$ peut être mise sous cette forme.

h étant une fonction donnée, satisfaisant à $\Delta\Delta h = 0$, nous prenons d'abord $w = \frac{1}{4r} \int_0^r \Delta h d\varrho$, nous avons alors $\frac{\partial}{\partial r} (4rw) = \Delta h$ et puisque

$$v = h - r^2 w, \Delta v = \Delta h - 4w - 4r \frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

Calculons maintenant Δw .

Nous avons:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{1}{4r^2} \int_0^r \Delta h d\varrho + \frac{\Delta h}{4r} = -\frac{w}{r} + \frac{\Delta h}{4r},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{w}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\Delta h}{4r^2} + \frac{1}{4r} \frac{\partial \Delta h}{\partial r} = \frac{2w}{r^2} - \frac{\Delta h}{2r^2} + \frac{1}{4r} \frac{\partial \Delta h}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} = \frac{1}{4r} \int_0^r \frac{\partial^2 \Delta h}{\partial \vartheta^2} d\varrho,$$

donc

$$\Delta w = \frac{w}{r^2} - \frac{\Delta h}{4r^2} + \frac{1}{4r} \frac{\partial \Delta h}{\partial r} + \frac{1}{4r^3} \int_0^r \frac{\partial^2 \Delta h}{\partial \vartheta^2} d\varrho.$$

Parce que $\Delta\Delta h = 0$, dans la dernière intégrale

$$\frac{\partial^2 \Delta h}{\partial \vartheta^2} = -\varrho^2 \frac{\partial^2 \Delta h}{\partial \varrho^2} - \varrho \frac{\partial \Delta h}{\partial \varrho},$$

donc

$$\int_0^r \frac{\partial^2 \Delta h}{\partial \vartheta^2} d\varrho = -r^2 \frac{\partial \Delta h}{\partial r} + \int_0^r \varrho \frac{\partial \Delta h}{\partial \varrho} d\varrho = -r^2 \frac{\partial \Delta h}{\partial r} + r \Delta h - 4rw.$$

Il s'en suit $\Delta w = 0$.

Pour déterminer h , il faut avoir v et w et ces fonctions, étant harmoniques, sont définies, quand leurs valeurs sur C sont connues.

Celles-ci satisfont à

$$r^2 w + v = g_1 \dots \dots \dots \dots \dots \quad (9)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial n} (r^2 w + v) = g_2 \dots \dots \dots \dots \dots \quad (10)$$

sur C . Nous avons

$$w_P = - \int_C w_Q \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} ds, \quad v_P = - \int_C v_Q \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} ds, \quad (11)$$

où le point Q parcourt la courbe C . G étant maintenant la fonction de GREEN ordinaire, relative à l'équation de LAPLACE et à la courbe C . Substituant (11) dans l'équation (10) nous trouvons

$$2r \frac{\partial r}{\partial n} w_P - r^2 \frac{\partial}{\partial n_P} \int_C w_Q \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} ds - \frac{\partial}{\partial n_P} \int_C v_Q \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} ds = g_2$$

et éliminant v_Q à l'aide de (9)

$$2r \frac{\partial r}{\partial n} w_P - r^2 \frac{\partial}{\partial n_P} \int_C w_Q \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} ds + \\ + \frac{\partial}{\partial n_P} \int_C r_Q^2 w_Q \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} ds - \frac{\partial}{\partial n_P} \int_C g_1 \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} ds = g_2$$

ou, Γ étant la fonction harmonique à l'intérieur de C , qui prend sur C la succession de valeurs, donnée par la fonction g_1 ,

$$2r \frac{\partial r}{\partial n} w_P - \int_C (r_Q^2 - r_P^2) w_Q \frac{\partial^2 G(P, Q)}{\partial n_P \partial n_Q} ds = \frac{\partial \Gamma}{\partial n} + g_2 \dots \quad (12)$$

Nous avons ainsi trouvé une équation intégrale pour la fonction w_Q . Quand cette fonction est connue, (9) nous donne v_Q et (11) les fonctions w et v en un point quelconque intérieur à C , donc nous aurons aussi la fonction h .

Cependant il y a encore une difficulté à surmonter, c'est que l'intégrale dans (12) n'a pas de sens ordinaire, puisque l'intégrand a un pôle simple quand Q vient en P . Mais l'équation (12) vaut, quand on prend la valeur principale de l'intégrale au sens de CAUCHY. Les équations intégrales de ce genre ont été traitées par M. G. BERTRAND¹).

¹⁾ Comptes Rendus de l'Académie T 172, 1921, pag. 1458, et Annales de l'Ecole Normale Supérieure T 40, 1923, pag. 151.

Mathematics. — *Sur quelques propriétés d'une classe de surfaces minima.* Par A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

§ 1. Dans un article récent¹⁾ dans ce journal Prof. WOLFF a dérivé quelques inégalités concernant des fonctions bornées univalentes. De ces inégalités il tire quelques propriétés concernant la longueur des images de certaines courbes, situées dans le domaine où la fonction univalente est définie.

On peut généraliser d'un façon très simple toutes ces propriétés pour des courbes situées sur une surface minima, appartenant à une certaine classe. C'est une illustration nouvelle de la relation intime qui existe entre la théorie des surfaces minima et la théorie des fonctions régulières d'une variable complexe. Les démonstrations de ces propriétés sont presque identiques à celles de M. WOLFF, de sorte que nous les omettons — sauf dans quelques exemples — et pouvons nous restreindre à énoncer les propriétés correspondantes.

§ 2. On peut voir les propriétés des fonctions analytiques d'une variable complexe comme des propriétés de paires de fonctions harmoniques conjuguées $u(x, y)$, $v(x, y)$ ($z = x + iy$), où u et v satisfont aux équations différentielles de CAUCHY-RIEMANN. Ces équations sont équivalentes aux équations

$$u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2, \quad u_x u_y + v_x v_y = 0 \quad \left(u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ etc.} \right)$$

Comme une généralisation on peut introduire la notion „triple de fonctions harmoniques conjuguées”, $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ où u , v , w satisfont à deux équations, généralisations des équations de CAUCHY-RIEMANN:

$$u_x^2 + v_x^2 + w_x^2 = u_y^2 + v_y^2 + w_y^2, \quad u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y = 0,$$

ou, avec la notation de la géométrie différentielle

$$E = G, \quad F = 0. \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

De plus on a $\Delta u = \Delta v = \Delta w = 0$.

La relation avec la théorie des surfaces minima est alors établie puisque, selon un théorème de WEIERSTRASZ, la surface représentée avec coördonnées cartésiennes par

$$X = u(x, y), \quad Y = v(x, y), \quad Z = w(x, y). \dots \dots \quad (2)$$

est une surface minima et inversement chaque surface minima peut être représentée de cette façon.

§ 3. Les inégalités de M. WOLFF sont valables pour des fonctions univalentes. Aussi, les propriétés analogues ne seront pas valables pour les surfaces minima les plus générales, mais seulement pour une classe, convenablement définie.

¹⁾ J. WOLFF, Inégalités remplies par les fonctions univalentes. Proc. Nederl. Akad. v. Wetensch. XLIV, p. 956—963 (1941).

Puisque u , v et w sont harmoniques dans le domaine de définition Ω , u , v et w sont les parties réelles de trois fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$ et $f_3(z)$, régulière dans Ω .

$$\left. \begin{array}{l} u = \Re f_1(z) \\ v = \Re f_2(z) \\ w = \Re f_3(z) \end{array} \right\} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

Nous supposons dans tout ce qui suit que f_1 , f_2 , f_3 sont univalents dans Ω . Une surface minima, vérifiant cette condition sera appelée *univalente*. Il suit de (3)

$$u_x - iu_y = f'_1(z), \quad v_x - iv_y = f'_2(z), \quad w_x - iw_y = f'_3(z). \quad \dots \quad (4)$$

Avec $E = G$, il en résulte

$$E = \frac{1}{2}(|f'_1|^2 + |f'_2|^2 + |f'_3|^2). \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

Le théorème de KOEBE sur les fonctions univalentes prend alors la forme suivante. Soit Ω le cercle-unité. Alors pour $|z| \leq \varrho < 1$

$$\underline{G}(\varrho) |f'_i(0)| < |f'_i(z)| < \bar{G}(\varrho) |f'_i(0)|, \quad (i = 1, 2, 3)$$

où \underline{G} et \bar{G} dépendent de ϱ et non des fonctions f_i . Donc avec (5)

$$\underline{G}(\varrho) E^{\frac{1}{2}}(0) < E^{\frac{1}{2}}(z) < \bar{G}(\varrho) E^{\frac{1}{2}}(0). \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

Supposons de plus que dans Ω

$$(u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} < M \quad (M \text{ constante}). \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (7)$$

Il suit de cette condition que u , v et w sont bornés dans Ω . Si donc Ω est le demi-plan $x > 0$, puisque u , v et w sont harmoniques, la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x + it) \quad \text{etc.}$$

existe presque partout sur $x = 0$. Il existe donc une plénitude¹⁾ de points it sur $x = 0$ telle que les limites

$$\left. \begin{array}{l} \lim u(x + it) \\ \lim v(x + it) \\ \lim w(x + it) \end{array} \right\} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (8)$$

existent pour $x \rightarrow 0$.

Les théorèmes de KOEBE et de FATOU sont les seuls moyens essentiels, utilisés par M. WOLFF dans ses démonstrations. Puisque ces théorèmes restent valables dans notre cas, comme on le voit de (6) et (8), les démonstrations sont identiques.

§ 4. Donnons quelques exemples. L'élément d'aire de la surface minima S , représentée au moyen d'un triple de fonctions conjuguées, est $H dx dy = E dx dy$. En vertu de (7) l'aire de l'image de Ω est finie. Donc

$$\iint_{\Omega} E dx dy < \infty. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (9)$$

Par D sera désigné le demi-plan $x > 0$, par C le cercle-unité.

¹⁾ D'après DENJOY une plénitude d'un ensemble E est tout sous-ensemble e de E tel que $E - e$ est de mesure nulle.

Théorème I.

Pour chaque suite $\{z_n\}$ dans D pour laquelle $x_n \rightarrow 0$, on a

$$\lim x_n E^{\frac{1}{2}}(z_n) = 0.$$

Si ce n'était pas vrai, il existerait un nombre $\varepsilon > 0$ et une suite $\{z_n\}$ telle que $x_n \rightarrow 0$, tel que $x_n E^{\frac{1}{2}}(z_n) > \varepsilon$ ($n = 1, 2, \dots$). Les f_i sont certainement univalents dans le cercle de centre z_n et de rayon x_n , de sorte que le théorème de KOEBE peut être appliqué dans le cercle γ_n de centre z_n et de rayon $\frac{1}{2}x_n$. Donc

$$E^{\frac{1}{2}}(z) > \frac{k \varepsilon}{x_n} \quad (k \text{ constante positive}).$$

Donc

$$\iint_{\gamma_n} E \, dx \, dy > \frac{k^2 \pi \varepsilon^2}{4}.$$

Cette inégalité est vraie pour une infinité de cercles γ_n , extérieurs l'un à l'autre, d'où résulte une contradiction avec (9).

Puisque les conditions $E = G$, $F = 0$, $\Delta u = \Delta v = \Delta w = 0$ sont invariantes par une représentation conforme, on obtient comme M. WOLFF le

Théorème IA.

Soient u, v, w définis dans C ; alors on a

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|) E^{\frac{1}{2}}(z) = 0.$$

Soit $L(\varrho)$ la longueur de l'image sur S du cercle $x^2 + y^2 = \varrho^2$ ($0 < \varrho < 1$). Alors, puisque l'élément linéaire vaut $ds = E^{\frac{1}{2}} \varrho d\varphi$,

$$(1 - \varrho) L(\varrho) = (1 - \varrho) \int_0^{2\pi} E^{\frac{1}{2}}(\varrho e^{i\varphi}) \varrho d\varphi.$$

Donc avec IA

$$\lim_{\varrho \rightarrow 1} (1 - \varrho) L(\varrho) = 0.$$

Les théorèmes II—IV A de M. WOLFF se généralisent de même façon pour la classe considérée de surfaces minima. Il faut seulement substituer partout $|f'(z)|$ respectivement $|\Phi'(z)|$ par $E^{\frac{1}{2}}(z)$ et les longueurs $L(z)$ par les longueurs des images sur la surface S^1).

En particulier on obtient le résultat suivant:

Soient u, v, w définis dans C . Soit $\alpha \beta$ une corde de $x^2 + y^2 = 1$ et soit $L(z)$ la longueur de l'image sur S du segment $z_0 z$ de $\alpha \beta$ où z_0 est fixe. Alors on a pour $z \rightarrow \alpha$

$$E^{\frac{1}{2}}(z) = 0 (|z - \alpha|)^{-\frac{1}{2}}$$

pour une pléitude de points z sur $x^2 + y^2 = 1$. Il s'en suit immédiatement que $L(z)$ reste fini dans ces points z si $z \rightarrow \alpha$.

Cependant ce résultat concernant la rectifiabilité des courbes sur une surface minima peut être généralisé considérablement au moyen d'un théorème sur les fonctions univa-

1) Remarquons que l'existence presque partout d'une limite à la frontière n'est pas utilisée dans la démonstration de M. WOLFF des théorèmes VI et VI A. Il s'en suit que ces théorèmes sont déjà valables pour la pléitude où $\int |f'|^2 dx < \infty$ (resp. $\int E dx < \infty$). Il n'est donc pas nécessaire, comme l'indique M. WOLFF, de considérer les points communs de cette pléitude et de celle, résultant du théorème de FATOU.

lentes, dérivé par M. WOLFF dans une note dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences de 23 juin 1941.

Admettons de nouveau que u, v, w sont définis dans C et que f_1, f_2, f_3 y sont réguliers et univalents. Γ_α soit la courbe suivante. $\alpha = e^{i\varphi}$ est un point de $x^2 + y^2 = 1$; Γ_α est situé dans C , aboutissant en α . La valeur absolue de l'angle de 0α avec chaque corde de Γ_α est $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est fixe. Alors l'image de Γ_α sur la surface minima S est rectifiable pour presque tous les α .

Puisque u, v et w sont bornés, on a

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{2}}^1 E(\varrho e^{i\varphi}) \varrho d\varrho < \infty.$$

Si $L(\varphi)$ désigne la longueur de l'image sur S du segment $(\frac{a}{2}, a)$, on a

$$L(\varphi) = \int_{\frac{1}{2}}^1 E^{\frac{1}{2}}(\varrho e^{i\varphi}) d\varrho$$

$$\{L(\varphi)\}^2 \equiv \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 E(\varrho e^{i\varphi}) d\varrho < \int_{\frac{1}{2}}^1 E(\varrho e^{i\varphi}) \varrho d\varrho,$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} \{L(\varphi)\}^2 d\varphi < \infty.$$

$L(\varphi)$ est donc fini presque partout. La longueur de l'image du rayon $O\alpha$ est donc finie, sauf éventuellement sur un ensemble de points α de mesure nulle; soit E l'ensemble où cette longueur est finie. Soient α un point de E , P un polygone inscrit de Γ_α et ζ la projection orthogonale sur $O\alpha$ d'un point quelconque z de P . Par une application du théorème de KOEBE sur f_1, f_2 et f_3 , on obtient

$$E^{\frac{1}{2}}(z) < G E^{\frac{1}{2}}(\zeta) \quad (G \text{ constante}).$$

De plus on a $\left| \frac{dz}{d\zeta} \right| < M$. Soit $L(P)$ la longueur de l'image de P . On a

$$L(P) = \int_P E^{\frac{1}{2}}(z) |dz| < M G \int_{O\alpha} E^{\frac{1}{2}}(\zeta) |d\zeta|.$$

α appartenant à E , le membre à droite est borné. Les longueurs des images des polygones inscrits de Γ_α sont donc bornées, de sorte que Γ_α est rectifiable¹⁾.

Remarques.

1. Prof. WOLFF m'a communiqué que Mlle FERRAND à Paris a montré que la convexité des courbes est superflue dans les théorèmes VI et VI A de WOLFF. La démonstration de M. WOLFF de cette propriété s'applique aussi dans notre cas.

2. Dans la démonstration de la formule (5) la condition $F = 0$ n'est pas utilisée. Il en résulte que le théorème de KOEBE, sous la forme des inégalités (6), est valable

¹⁾ Cette démonstration est la transformation de celle de M. WOLFF.

pour toutes les surfaces, satisfaisant à $\Delta = \Delta v = \Delta w = 0$, $E = G$, f_1, f_2, f_3 étant univalents. Les autres démonstrations ne sont pas valables pour cette classe plus générale, puisque l'élément d'aire est alors $H dx dy = \sqrt{E^2 - F^2} dx dy$. Les conditions $E = G$, $F = 0$ donnent

$$f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2 = 0.$$

On en déduit immédiatement les formules de WEIERSTRASZ pour les surfaces minima réelles

$$\left. \begin{array}{l} X = \Re \int (1 - z^2) F(z) dz \\ Y = \Re \int i(1 + z^2) F(z) dz \\ Z = \Re \int 2z F(z) dz \end{array} \right\}$$

§ 5. Au fin de son article, M. WOLFF a dérivé un théorème remarquable concernant les valeurs-limite à la frontière des fonctions univalentes définies dans C . Ce théorème se généralise aussi facilement pour les triples de fonctions conjuguées, donnant lieu alors à un théorème concernant la frontière des surfaces minima de la classe considérée. Il suffit d'appliquer le raisonnement de M. WOLFF à f_1, f_2 et f_3 , séparément et d'employer le même chemin d'intégration que M. WOLFF a utilisé. Par exemple on a, avec la notation de WOLFF,

$$\left| \int_{z'_1}^{z'_1} f'_1 dz \right| < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f'_1| \varrho'_1 d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}} \varrho'_1 d\varphi.$$

Or, puisque le théorème auxiliaire de WOLFF subsiste (inégalité (21)),

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (u_x^2 + v_x^2 + w_x^2)^{\frac{1}{2}} \varrho'_1 d\varphi < \varepsilon, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (u_y^2 + v_y^2 + w_y^2)^{\frac{1}{2}} \varrho'_1 d\varphi < \varepsilon.$$

Donc

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}} \varrho'_1 d\varphi < \varepsilon.$$

Il en résulte enfin

$$|f_i(z_2) - f_i(z_1)| < \varepsilon, \quad (i = 1, 2, 3),$$

donc pour les parties réelles

$$|u(z_2) - u(z_1)| < \varepsilon, \quad |v(z_2) - v(z_1)| < \varepsilon, \quad |w(z_2) - w(z_1)| < \varepsilon.$$

On obtient le résultat suivant:

Soit S la partie d'une surface minima, représentée au moyen d'un triple de fonctions conjuguées harmoniques $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ où (x, y) est dans le cercle-unité C . Soit a un point de $x^2 + y^2 = 1$. Alors pour presque tous les a le point $P(x, y)$ de S tend vers un point-limite bien défini $P(a)$ si les coordonnées (x, y) tendent vers celles de a dans un cercle quelconque tangent à $x^2 + y^2 = 1$ dans a .

Remarquons que M. M. BERCKENBACH et RADO¹⁾ ont déjà généralisé pour triples de fonctions harmoniques conjuguées le théorème connu de LINDELÖF concernant les limites angulaires (c. à. d. l'existence de la limite dans toute angle de sommet a); la démonstration est entièrement identique à celle de la théorie des fonctions de variable complexe et la condition d'univalence n'est pas nécessaire pour cela. Le résultat ci-dessus en est une extension pour les triples univalentes.

Den Haag, mai 1942.

¹⁾ E. F. BERCKENBACH and T. RADO, Subharmonic functions and minimal surfaces. Transactions of the American Math. Society. Vol. 35, p. 648—661 (1933).

Mathematics. — *Sur une classe de fonctions sous-harmoniques et des triples de fonctions harmoniques conjuguées.* Par A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

§ 1. Une fonction $f(x, y)$, définie dans un domaine Ω , sera dite de classe PL dans Ω si a) $f(x, y) \geq 0$, b) $\log f(x, y)$ est sous-harmonique dans Ω .

On montre aisément la propriété suivante: ¹⁾

Soit $f(x, y)$ borné et de classe PL dans le cercle-unité $C: x^2 + y^2 < 1$.

Supposons que $f(x, y)$ est continu sur un arc σ de $x^2 + y^2 = 1$ et que la limite de $f(x, y)$ y est zéro. Alors $f(x, y) \equiv 0$.

Cette propriété peut être généralisée considérablement dans la direction du théorème bien connu de MM. F. et M. RIESZ concernant les valeurs-limite des fonctions régulières d'une variable complexe.

Nous démontrons:

Soit $f(x, y)$ de classe PL dans C ; $f(x, y) < M$. Supposons qu'on a sur un ensemble E de points de $x^2 + y^2 = 1$ de mesure > 0

$$\lim f(x, y) = 0.$$

si le point $z = x + iy$ tend vers un point quelconque Q de E suivant le rayon OQ . Alors $f(x, y) \equiv 0$.

Pour la démonstration nous suivons presqu'à la lettre une méthode, utilisé par Prof. WOLFF pour une démonstration du théorème cité de MM. RIESZ ²⁾.

Puisque $\log f(x, y)$ est sous-harmonique, on a pour $0 < \varrho < 1$,

$$\log f(0, 0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) d\varphi.$$

Soit E_n l'ensemble des valeurs de φ pour lesquelles

$$f\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cos \varphi, \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin \varphi\right) < \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

mE_n soit la mesure de E_n . Il suit

$$2\pi \log f(0, 0) \leq mE_n \cdot \log \varepsilon + 2\pi \log M.$$

Donc

$$mE_n \leq \frac{C}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \quad (n = 1, 2, \dots; C \text{ constante}).$$

Les valeurs de φ pour lesquelles $\lim f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) = 0$, appartiennent à la limite inférieure de E_n pour $n \rightarrow \infty$. La mesure de l'ensemble de ces valeurs est donc au plus $\frac{C}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$. Puisque ε est arbitraire, cette mesure est donc nulle, ce qui démontre le théorème.

¹⁾ E. F. BECKENBACH and T. RADO, Subharmonic functions and minimal surfaces. Transactions of the American Math. Soc. **35**, 648—661 (1933).

²⁾ J. WOLFF, Over de randwaarden van holomorphe functies. Verslagen Kon. Acad. van Wetensch., Amsterdam, **36**, 1237 (1927).

Dans la théorie des fonctions d'une variable complexe le théorème de F. et M. RIESZ reste valable pour la classe des fonctions non-bornées qui sont quotient de fonctions bornées. Pour les fonctions de classe *PL* non bornées le raisonnement ci-dessus ne s'applique plus. Néanmoins, une généralisation est possible. Supposons pour cela que $\lim f(x, y) = 0$, z tendant vers Q de E suivant tout chemin dans C non tangent à $x^2 + y^2 = 1$ dans Q . Alors on a encore $f(x, y) \equiv 0$. C'est une généralisation d'un théorème de PRIWALOFF. Pour la démonstration on peut exactement suivre la méthode PRIWALOFF et LUSIN, qui réduit le cas général au cas de fonctions bornées¹⁾. Par cette méthode on construit un sous-domaine Ω de C , dont la partie de la frontière (qui est rectifiable) située sur $x^2 + y^2 = 1$ est un sous-ensemble perfect E_1 de E , tel que $f(x, y)$ est continu sur E_1 et tel que la limite de f est nulle en chaque point de E_1 , z tendant vers ce point par un chemin arbitraire de $\Omega + \Sigma$. Puisque $\log f(x, y)$ est sous-harmonique dans C , $f(x, y)$ y est aussi sous-harmonique. En conséquence des propriétés des fonctions sous-harmoniques, f est borné sur tout sous-domaine de C , situé avec sa frontière dans C . En tenant compte de la continuité sur E_1 (fermé), il résulte que f est borné dans Ω . On fait alors une représentation conforme de Ω sur le cercle-unité; E_1 est transformé dans un ensemble \bar{E}_1 de mesure > 0 . La sous-harmonicité d'une fonction étant une propriété invariante par représentation conforme, $f(x, y)$ est transformé dans une fonction de classe *PL* bornée, continue et nulle sur \bar{E}_1 , et est donc identiquement nulle.

Remarquons que MM. BECKENBACH et RADO dans leur article cité ont supposé que $f(x, y)$ est continu dans Ω . Cependant nous avons utilisé la définition la plus générale des fonctions sous-harmoniques, qui ne suppose que la semi-continuité supérieure.

Si f de classe *PL* est borné, on peut tirer de l'existence d'une limite radiale dans un point-frontière, l'existence d'une limite angulaire dans ce point (c. à. d. l'existence d'une limite lelong tout chemin non tangent à la frontière); c'est ce que MM. BECKENBACH et RADO ont déjà remarqué, toujours en supposant f continu. La démonstration est la même que pour le théorème analogue de LINDELÖF pour les fonctions régulières d'une variable complexe. Pour les fonctions de classe *PL* non bornées cette propriété n'est plus vraie.

§ 2. On peut appliquer le théorème précédent aux triples de fonctions harmoniques conjuguées.

Les fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ seront appelées un triple de fonctions harmoniques conjuguées, si dans Ω

$$\begin{aligned} 1^{\circ}. \quad & \Delta u = \Delta v = \Delta w = 0; \\ 2^{\circ}. \quad & u_x^2 + v_x^2 + w_x^2 = u_y^2 + v_y^2 + w_y^2; \quad u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y = 0 \\ & \left(u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ etc.} \right). \end{aligned}$$

MM. BECKENBACH et RADO (l.c.) ont montré que pour un tel triple

$$[(u(x, y))^2 + (v(x, y))^2 + (w(x, y))^2]^{\frac{1}{2}}$$

est de classe *PL* dans Ω .

L'application du § 1 à la fonction

$$[(u(x, y) - a)^2 + (v(x, y) - b)^2 + (w(x, y) - c)^2]^{\frac{1}{2}}$$

donne le théorème suivant:

Soient dans C : $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ un triple de fonctions harmoniques conjuguées

1) N. LUSIN et J. PRIWALOFF, Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. Annales de l'école normale supérieure t. 42, 160 (1925).

bornées; donc $(u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} < M$. Supposons qu'on a sur un ensemble E de points de $x^2 + y^2 = 1$ de mesure > 0 .

$$\lim u(x, y) = a, \lim v(x, y) = b, \lim w(x, y) = c$$

si le point $z = x + iy$ tend vers un point Q quelconque de E suivant le rayon OQ ; a, b, c constantes. Alors on a dans C

$$u(x, y) \equiv a, v(x, y) \equiv b, w(x, y) \equiv c.$$

L'extension aux triples non-bornés est immédiate.

Dans les démonstrations du théorème de F. et M. RIESZ on utilise toujours l'intégrale de POISSON ou, comme le fait par exemple M. NEVANLINNA dans son livre „Eindeutige analytische Funktionen” (Berlin 1936), le premier théorème fondamental des fonctions méromorphes (donc la formule de POISSON-JENSEN). Il est donc intéressant, que la démonstration de M. WOLFF fait voir que la validité du théorème et son extension pour des triples est indépendant de la validité de la formule de POISSON-JENSEN. Or, pour les triples de fonctions harmoniques conjuguées la formule-intégrale de POISSON n'est pas vraie en général: en contradiction à ce qui se passe pour les modules des fonctions régulières d'une variable complexe — dont $(u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}$ est une généralisation —, $\log(u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}$ n'est pas une fonction harmonique de x, y aux points où $u, v, w \neq 0$ en général. On ne peut dire que c'est une fonction sous-harmonique. Au lieu d'une égalité on obtient donc pour les triples une inégalité dans la formule de POISSON. De même le premier théorème fondamental de NEVANLINNA deviendra une inégalité.

§ 3. Les valeurs-frontière d'un triple borné de fonctions harmoniques conjuguées peuvent être représentées sur les points d'un espace euclidien à trois dimensions. Du § 2 il suit que l'ensemble-image ne peut être un ensemble dénombrable. La question se pose d'obtenir une caractérisation plus précise de cet ensemble. Dans le cas deux-dimensionnel ce problème est résolu complètement. On sait que la capacité de l'ensemble est alors positive. Plus précis: à chaque ensemble mesurable de points de $|z| = 1$ avec mesure linéaire > 0 , correspond un ensemble de capacité positive (déterminer la capacité avec le potentiel logarithmique). Inversement: à chaque ensemble fermé de capacité positive correspond une infinité de fonctions méromorphes, chacune quotient de fonctions bornées, dont les valeurs limites radiales appartiennent à l'ensemble donné. Pour une démonstration très courte on verra: FROSTMAN, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles, Lund 1935, p. 96.

Dans le cas trois-dimensionnel — donc triples de fonctions — on expekte que la capacité des projections orthogonales de l'ensemble-image sur deux des plans-coordonnées au moins sera positive. Si cela était vrai, on a le problème inverse de savoir s'il correspond un triple de fonctions harmoniques conjuguées à chaque ensemble dont la capacité des projections orthogonales sur deux des plans-coordonnées est positive.

Remarquons que c'est évident que la capacité newtonienne, c. à. d. la capacité définie en partant du potentiel newtonien, ne sera pas positive en général puisque cette capacité est nulle pour une courbe suffisamment régulière.

Un développement de la théorie des triples dans la direction du premier théorème fondamental de NEVANLINNA des fonctions méromorphes semble nécessaire pour une résolution de ces problèmes, qui ont peut-être d'importance aussi pour le problème de PLATEAU (pour ce dernier problème en particulier si la courbe donnée n'est pas une courbe de JORDAN). On verra mon article dans ces Proceedings: Sur quelques propriétés d'une classe de surfaces minima.

Den Haag, juin 1942.

Mathematics. — Die Liniengeometrie des 4-dimensionalen Raumes. (Erste Mitteilung.)
Von J. C. H. GERRETSSEN. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

Einleitung.

Die projektive Liniengeometrie des 4-dimensionalen Raumes ist ausführlich in einer schönen Abhandlung von G. CASTELNUOVO¹⁾ mit algebraischen Hilfsmitteln behandelt worden. Neuerdings hat W. VREEKEN²⁾ in seiner Leidener Dissertation die von CASTELNUOVO gefundene Ergebnisse aufs neue hergeleitet mit metrischen Hilfsmitteln, nämlich mit der Kinematik und der Statik im 4-dimensionalen Raum.

Das „Wiskundig Genootschap“, Amsterdam, stellte für das Jahr 1940 als Preisaufgabe no. 7 die Untersuchung der Liniengeometrie im 4-dimensionalen Raum mit Hilfe der Abbildung der Geraden auf die Punkte einer 6-dimensionalen Mannigfaltigkeit fünften Grades im 9-dimensionalen Raum. Die Behandlung der Liniengeometrie des n -dimensionalen Raumes mit Hilfe der Abbildungsmethode stöszt für $n > 3$ auf gewisse Schwierigkeiten, die wohl darauf zurückzuführen sind, dass die Abbildungsmannigfaltigkeiten eine verwickelte Struktur haben. Wenn auch schon in der älteren Literatur von der Abbildungsmethode für die Liniengeometrie des 4-dimensionalen Raumes gelegentlich Gebrauch gemacht worden ist, hat jedoch zuerst J. A. TODD³⁾ diese Methode systematisch angewandt. Dieser Verfasser hat vor allem ausführlich die Struktur der Abbildungsmannigfaltigkeit auf überwiegend synthetischem Wege studiert. Die Ergebnisse von CASTELNUOVO sind hierbei nur nebenbei zur Sprache gekommen. Weiter hat TODD den Durchschnitten der Abbildungsmannigfaltigkeit mit linearen Räumen grosse Aufmerksamkeit gewidmet. Eine vollständige Klassifikation dieser Durchschnitte hat er dabei nicht erzielt. Eine (wie es scheint) vollständige Aufzählung aller möglichen Durchschnitte mit linearen Räumen enthält eine preisgekrönte Antwort von N. H. KUIPER⁴⁾ auf die oben genannte Aufgabe.

Mit dieser Mitteilung mache ich einen Anfang mit dem Aufbau der Liniengeometrie in S_4 , wobei ich mich von der Abbildungsmethode bediene, und beabsichtige damit in erster Linie die wichtigsten Ergebnisse von CASTELNUOVO wiederzugewinnen.

§ 1. Die GRASZMANNsche Mannigfaltigkeit der Geraden im 4-dimensionalen Raum.

Ein Punkt x des 4-dimensionalen projektiven Raumes S_4 wird in bekannter Weise gegeben durch fünf komplexe homogene Koordinaten $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Eine Gerade in S_4 sei durch die Punkte x und y gegeben. Wir bilden aus deren Koordinaten die Ausdrücke:

$$\pi_{kl} = \begin{vmatrix} x_k & x_l \\ y_k & y_l \end{vmatrix}, \quad (k, l = 0, 1, 2, 3, 4). \quad \dots \quad (1, 1).$$

¹⁾ G. CASTELNUOVO, Ricerche di Geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni, Atti del R. Ist. Veneto (7) 2, 855—901 (1891).

²⁾ W. VREEKEN, Het lineaire vijfcomplex van rechte lijnen in R_4 en zijn bundels, Amsterdam 1936.

³⁾ J. A. TODD, The locus representing the lines of four-dimensional space and its application to linear complexes in four dimensions, Proc. London Math. Soc. (2) 30, 513—550 (1930).

⁴⁾ N. H. KUIPER, Lijnen in R_4 , Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 21, 1, 2, 124—143 (1941).

Offenbar sind die π_{kl} nicht alle Null, wenn die Punkte x und y nicht zusammenfallen. Bei Vertauschung der Indices wechselt π_{kl} das Vorzeichen und es wird $\pi_{kl} = 0$, wenn die Indices gleich sind. Somit gibt es 10 wesentlich verschiedene Zahlen π_{kl} . Bekanntlich sind sie bis auf einen Proportionalitätsfaktor allein von der Geraden bestimmt, während sie umgekehrt die Gerade eindeutig bestimmen. Sie können daher als homogene Koordinaten der Geraden dienen⁵⁾; dabei werden wir $k < l$ voraussetzen.

Zwischen den Ausdrücken π_{kl} bestehen insgesamt fünf linear-unabhängige Fundamentalrelationen:

$$p^i \equiv \pi_{kl} \pi_{mn} + \pi_{km} \pi_{nl} + \pi_{kn} \pi_{lm} = 0, \dots \quad (1, 2)$$

Dabei müssen für (i, k, l, m, n) der Reihe nach die geraden Permutationen der Zahlen $(0, 1, 2, 3, 4)$ genommen werden. Umgekehrt kann man beweisen, dass die Zahlen π_{kl} die Koordinaten einer Geraden liefern, wenn sie nicht alle Null sind, bei Vertauschung der Indices das Vorzeichen wechseln und die Relationen (1, 2) erfüllen.

Eine Hyperebene u des 4-dimensionalen Raumes S_4 wird gegeben durch fünf homogene Hyperebenenkoordinaten $\{u^0, u^1, u^2, u^3, u^4\}$. Eine Ebene sei gegeben als Durchschnitt der Hyperebenen u und v . Aus deren Hyperebenenkoordinaten bilden wir die Ausdrücke:

$$\pi^{kl} = \begin{vmatrix} u^k & u^l \\ v^k & v^l \end{vmatrix}, \quad (k, l = 0, 1, 2, 3, 4) \dots \quad (1, 3)$$

welche ähnliche Eigenschaften wie die Zahlen (1, 1) haben. Es gibt deren also 10 wesentlich verschiedene, die als Koordinaten der Ebene dienen können. Ebenfalls bestehen fünf Fundamentalrelationen:

$$p_i \equiv \pi^{kl} \pi^{mn} + \pi^{km} \pi^{nl} + \pi^{kn} \pi^{lm} = 0, \dots \quad (1, 4)$$

deren Erfüllung eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass die π^{kl} die Koordinaten einer Ebene liefern.

Eine Gerade und eine Ebene heiszen *inzident*, wenn sie mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Sind π_{kl} , bzw. π^{kl} , $(k < l)$, die Koordinaten der Geraden, bzw. der Ebene, dann lautet bekanntlich die Inzidenzbedingung:

$$\sum_{k < l} \pi_{kl} \pi^{kl} = 0, \dots \quad (1, 5)$$

Wir werden nunmehr die Koordinaten π_{kl} , $(k < l)$, auch auffassen als Koordinaten $\xi_{kl} = \pi_{kl}$ eines Punktes $\{\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}, \xi_{04}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}, \xi_{23}, \xi_{24}, \xi_{34}\}$ in einem 9-dimensionalen projektiven Raum Σ_9 . Die fünf Gleichungen:

$$x^i \equiv \xi_{kl} \xi_{mn} + \xi_{km} \xi_{nl} + \xi_{kn} \xi_{lm} = 0 \dots \quad (1, 6)$$

definieren in diesem Raum eine algebraische Mannigfaltigkeit \mathcal{Q} , die sogenannte **GRASZMANNsche Mannigfaltigkeit** der Geraden in S_4 ; in (1, 6) gilt die Festsetzung: $\xi_{pq} = -\xi_{qp}$.

Wir gelangen folgendermaßen zu einer Parameterdarstellung von \mathcal{Q} . Es sei $X_0 X_1 X_2 X_3 X_4$ das Koordinatensimplex in S_4 ; dabei habe X_0 die Koordinaten $\{1, 0, 0, 0, 0\}$, usw. Diejenigen Geraden, welche keinen Punkt mit der Ebene $X_2 X_3 X_4$ gemeinsam haben, sind bestimmt durch ihre Schnittpunkte mit den beiden Räumen $X_0 X_2 X_3 X_4$ und $X_1 X_2 X_3 X_4$. Dem Schnittpunkt mit dem ersten Raum können wir die Koordinaten

5) Eine knappe Einführung in die Liniengeometrie des n -dimensionalen Raumes findet man in:

B. L. VAN DER WAERDEN, Einführung in die algebraische Geometrie (Berlin 1939), § 7. Im folgenden wird dieses Buch mit „Einführung“ zitiert.

$\{1, 0, s_1, s_2, s_3\}$ erteilen und dem Schnittpunkt mit dem zweiten Raum die Koordinaten $\{0, 1, t_1, t_2, t_3\}$. Die genannten Geraden haben somit die Koordinaten:

$$\begin{aligned} \pi_{01} &= 1, \pi_{02} = t_1, \pi_{03} = t_2, \pi_{04} = t_3, \pi_{12} = -s_1, \pi_{13} = -s_2, \pi_{14} = -s_3, \\ \pi_{23} &= s_1 t_2 - s_2 t_1, \pi_{24} = s_1 t_3 - s_3 t_1, \pi_{34} = s_2 t_3 - s_3 t_2. \end{aligned} \quad \left. \right\} (1.7)$$

Wenn wir die s_i, t_i als Unbestimmte annehmen, ist der Punkt mit den Koordinaten $(1, 7)$ ein unbestimmter Punkt, der offenbar auf Ω liegt. Man zeigt weiter leicht, dass jede homogene algebraische Relation in den ξ_{kl} , welche für die Ausdrücke $(1, 7)$ verschwindet, für die Koordinaten irgendeines Punktes von Ω verschwindet. Es wird also durch $(1, 7)$ tatsächlich eine Parameterdarstellung geliefert. Daraus ersehen wir, dass Ω irreduzibel ist und die Dimension 6 hat⁶⁾. Es bleibt noch übrig den Grad von Ω zu bestimmen. Zu dem Zweck kann ein von H. SCHUBERT angegebenes Verfahren angewendet werden, dassz neuerdings von B. L. VAN DER WAERDEN⁷⁾ eine exakte Begründung erhalten hat. Dieses Verfahren findet Anwendung auf die Mannigfaltigkeit der linearen m -dimensionalen Teilräume in einem S_n . Wir werden die Ergebnisse für $m = 1$ und $n = 4$ mitteilen.

Es sei S_{i_1} ein i_1 -dimensionaler linearer Raum in S_4 und S_{i_0} ein i_0 -dimensionaler linearer Raum, der in S_{i_1} enthalten ist. Mit $[i_0, i_1]$ werde die Menge der Geraden bezeichnet, welche in S_{i_1} enthalten sind und mit S_{i_0} mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Die Bildmannigfaltigkeit von $[i_0, i_1]$ in Σ_9 ist eine Teilmannigfaltigkeit von Ω mit der Dimension $i_0 + i_1 - 1$. Wir bemerken dabei, dassz die Zahlen i_0 und i_1 der Bedingung $0 \leq i_0 < i_1 \leq 4$ genügen müssen. Es sei nun $g(i_0, i_1)$ der Grad dieser Mannigfaltigkeit. Dann gilt nachfolgende wichtige Rekursionsformel:

$$g(i_0, i_1) = g(i_0 - 1, i_1) + g(i_0, i_1 - 1). \quad \dots \quad (1.8)$$

Wir müssen dabei beachten, dassz $g(j_0, j_1)$ nur dann von Null verschieden ist, wenn $0 \leq j_0 < j_1 \leq 4$ gilt. Selbstverständlich ist $g(0, 1) = 1$. Mit Hilfe von (1.8) können wir folgende Gradzahlen herleiten:

$$\begin{aligned} g(0, 1) &= 1; g(0, 2) = 1; g(0, 3) = 1; g(1, 2) = 1; g(0, 4) = 1; g(1, 3) = 2; \\ g(1, 4) &= 3; g(2, 3) = 2; g(2, 4) = 5; g(3, 4) = 5. \end{aligned} \quad \left. \right\} (1.9)$$

Die Geraden von $[3, 4]$ sind genau dieselben wie die Geraden von S_4 ; der Grad von Ω ist also 5. Zwischen den Koordinaten des allgemeinen Punktes $(1, 7)$ von Ω können keine linearen Relationen bestehen, daher ist Ω nicht schon in einem Σ_8 enthalten. Wir können die gefundenen Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die Geraden von S_4 können umkehrbar eindeutig abgebildet werden auf die Punkte einer 6-dimensionalen irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit Ω in einem 9-dimensionalen projektiven Raum Σ_9 . Diese Mannigfaltigkeit hat den Grad 5 und ist nicht schon in einem linearen Raum mit niedrigerer Dimension als 9 enthalten.

Wir wollen uns nun die auf Ω liegenden linearen Mannigfaltigkeiten etwas genauer ansehen. Wir erwähnen darüber die nachfolgenden Sätze:

2. Den Geradenbüscheln in S_4 entsprechen umkehrbar eindeutig die Geraden auf Ω .
3. Es liegen auf Ω zwei Arten von Ebenen. Den Ebenen der ersten Art entsprechen umkehrbar eindeutig die Geradenfelder von S_4 , den Ebenen der zweiten Art entsprechen umkehrbar eindeutig die Geradenbündel von S_4 .

⁶⁾ B. L. VAN DER WAERDEN, Einführung, § 29.

⁷⁾ B. L. VAN DER WAERDEN, Der Grad der GRASZMANNschen Mannigfaltigkeit der linearen S_m in S_n , Math. Ann. 113, 199—205 (1936).

4. Den Geradensternen in S_4 entsprechen umkehrbar eindeutig die 3-dimensionalen Räume auf Ω^8 .

Wir wollen auf die einfachen Beweise verzichten; sie können denen der entsprechenden Sätze der Liniengeometrie in S_3 leicht nachgebildet werden. Als Nebenergebnis haben wir noch:

5. Die Ebenen der zweiten Art auf Ω sind eben die in den 3-dimensionalen Räumen von Ω enthaltenen Ebenen.

Es folgt nun leicht:

6. Es gibt auf Ω keine linearen 4-dimensionalen Räume.

Denn sollte etwa A_4 ein auf Ω liegender Raum sein, dann gäbe es auf Ω mindestens zwei lineare Räume A_3 , deren Durchschnitt eine Ebene wäre und dann müsste es in S_4 zwei Geradensterne geben, die ein Geradenbündel gemeinsam hätten. Das ist aber unmöglich.

Für die weiteren Entwicklungen ist es wichtig etwas Näheres über die 6-dimensionalen Berührungsräume von Ω zu wissen. Zuerst werden wir beweisen:

7. Die mit einer festen Geraden π in S_4 inzidenten Geraden entsprechen umkehrbar eindeutig den Punkten eines 4-dimensionalen Kegels Ω_4^3 mit 0-dimensionalem Scheitel. Der Grad des Kegels beträgt 3 und der Kegel ist in einem 6-dimensionalen Raum Σ_6^* enthalten.

Wir wollen dabei Geraden inzident nennen, wenn sie mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Weiter bezeichnet allgemein Ω_d^g eine in Ω enthaltene d -dimensionale Mannigfaltigkeit g -ten Grades. Die mit π inzidenten Geraden bilden ein System [1, 4]; wir wollen π die Leitgerade dieses Systems nennen. Wegen $g(1,4) = 3$ beträgt der Grad des Bildes dieser Mannigfaltigkeit drei. Wir können nun in S_4 auf ein Koordinatensimplex $X_0X_1X_2X_3X_4$ transformieren, dessen beide Spitzen X_0 und X_1 auf der Geraden π liegen. Für alle Geraden, welche mit π inzident sind, gilt nun $\pi_{23} = \pi_{24} = \pi_{34} = 0$, folglich gehört Ω_4^3 dem Raum Σ_6^* mit den Gleichungen:

$$\xi_{23} = \xi_{24} = \xi_{34} = 0, \dots \quad (1, 10)$$

an. Die Mannigfaltigkeit Ω_4^3 kann aber keinem Raum mit niedrigerer Dimension als 6 angehören, denn in [1, 4] gibt es mindestens zwei Geradensterne, welche nur eine Gerade gemeinsam haben und somit liegen auf Ω_4^3 mindestens zwei Räume A_3 , welche nur einen Punkt gemeinsam haben.

Wir denken uns nun in S_4 eine Ebene gegeben mit Ebenenkoordinaten π^{kl} , die mit der Geraden π keinen Punkt gemeinsam hat. Die Koordinaten derjenigen Geraden, welche mit der Ebene inzident sind, genügen der Beziehung (1,5) und werden also auf die Punkte des Durchschnittes von Ω mit der Hyperebene Σ_8^* , deren Gleichung:

$$\sum_{k < l} \pi^{kl} \xi_{kl} = 0 \quad \dots \quad (1, 11)$$

lautet, abgebildet. Da Σ_8^* den Raum Σ_6^* nicht enthält — der Punkt π gehört ja nicht zu Σ_8^* — schneiden Σ_8^* und Σ_6^* einander in einem 5-dimensionalen Raum, während Ω_4^3 von Σ_8^* geschnitten wird in einer Mannigfaltigkeit Ω_3^3 , der in dem genannten 5-dimensionalen Raum liegt. Diese Mannigfaltigkeit bildet das Geradenbild ab, das aus den Geraden besteht, welche mit einer festen Geraden, der Leitgeraden, und einer festen Ebene, der Leitebene, inzident sind. Jede Gerade dieses Bildes lässt sich mit der Leitgeraden π

⁸⁾ Zur Erläuterung diene, dass wir das Gebilde [0, 3] ein *Geradenbündel* und das Gebilde [0, 4] ein *Geradenstern* nennen werden.

durch ein Büschel verbinden; daher entsteht Ω_4^3 durch Projektion von Ω_3^3 aus einem Punkt, welcher nicht in dem die Mannigfaltigkeit Ω_3^3 enthaltenden 5-dimensionalen Raum liegt. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Die Mannigfaltigkeit Ω_3^3 ist auch in anderer Hinsicht bemerkenswert. Man kann nämlich die Punkte dieser Mannigfaltigkeit umkehrbar eindeutig den Punktepaaren $x; y$ zuordnen, wovon der Punkt x einer Geraden und der Punkt y einer Ebene angehört. Die Mannigfaltigkeit Ω_3^3 gehört also der Klasse der sogenannten SEGREschen Mannigfaltigkeiten an⁹⁾. Man kann Ω_3^3 auf zweierlei Art erzeugen. Erstens ist es klar, dass die Geradenmannigfaltigkeit in S_4 , deren Bild eben Ω_3^3 ist, als die Gesamtheit der Geraden von ∞^2 Büscheln aufgefasst werden kann, deren Zentren in der Leitebene liegen; und zweitens als die Gesamtheit der Geraden von ∞^1 Bündeln, deren Zentren auf der Leitgeraden liegen. Dementsprechend gibt es auf $\Omega_3^3 \infty^2$ erzeugende Geraden und ∞^1 erzeugende Ebenen. Durch jeden Punkt von Ω_3^3 läuft genau eine erzeugende Gerade und eine erzeugende Ebene. Als Nebenergebnis haben wir damit gefunden:

8. Den Punktepaaren $x; y$, wovon x zu einer Geraden und y zu einer Ebene gehören entsprechen umkehrbar eindeutig die Punkte einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit dritten Grades, welche in einem 5-dimensionalen Raum liegt.

Von diesem Ergebnis werden wir später noch eine interessante Anwendung sehen.

Wir wenden uns nun wieder der Untersuchung des im Satz 7 genannten Raumes Σ_6^* zu und erwähnen zunächst:

9. Der im Satz 7 genannte Raum Σ_6^* berührt die Mannigfaltigkeit Ω im Punkte π , das Bild der Leitgeraden des Gebildes [1, 4].

Wir haben beim Beweise des Satzes 7 schon gesehen, dass bei geeigneter Wahl des Koordinatensimplices in S_4 der lineare Raum Σ_6^* , in dem die Bildpunkte der Geraden des Gebildes [1, 4] liegen, durch die Gleichungen (1,10) dargestellt wird. Mit Benutzung der schon oben erwähnten Parameterdarstellung für Ω rechnet man ohne Mühe nach, dass die Gleichungen des Tangentialraumes an Ω im Bildpunkte der Leitgeraden ebenfalls durch (1,10) dargestellt werden¹⁰⁾. Damit ist aber der Beweis schon beendet. Es gilt nun umgekehrt:

10. Der Berührungsraum Σ_6^* in irgendeinem Punkt π an Ω schneidet Ω in einer Mannigfaltigkeit Ω_4^3 , welche das Bild ist der Geradenmannigfaltigkeit [1, 4] in S_4 , deren Leitgerade dem Punkt π auf Ω entspricht.

Das Bild Ω_4^3 des Gebildes [1, 4] mit der in dem Satz genannten Leitgeraden gehört zu dem Berührungsraum in π an Ω und dieser fällt mit Σ_6^* zusammen, da Ω keine singulären Punkte hat. Wir brauchen nur noch zu beweisen, dass es ausserhalb Ω_4^3 auf Ω keine Punkte gibt, die auch Σ_6^* angehören. Zu dem Zweck nehmen wir an, es gäbe in Σ_6^* auf Ω einen Punkt π' , der nicht zu Ω_4^3 gehört. Dann müsste die Gerade $\pi\pi'$ als Gerade durch π von Σ_6^* die Mannigfaltigkeit Ω in π berühren. Anderseits muss aber jede solche Gerade ganz zu Ω gehören, da Ω Durchschnitt der quadratischen Mannigfaltigkeiten mit den Gleichungen (1, 6) ist. Also läge π' doch in Ω_4^3 . Dieser Widerspruch beweist die Behauptung.

Eine Hyperebene durch eine berührende Σ_6^* werden wir *Tangential-hyperebene* an Ω nennen und den Berührungsrand von Σ_6^* einen Berührungsrand der Hyperebene

⁹⁾ C. SEGRE, Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi, Rend. Circolo Mat. di Palermo 5, 192—204 (1891).

¹⁰⁾ VAN DER WAERDEN, Einführung, § 40.

mit Ω . Aus der Beziehung (1.5) lesen wir ab, dasz das Bild eines Geradensystems [2, 4] einem Σ_8^* angehört. Dieser schneidet Ω in einer 5-dimensionalen Mannigfaltigkeit Ω_5^5 , zu der eine Ebene Λ_2 der ersten Art gehört, nämlich das Bild der Gesamtheit der Geraden, welche der Leitebene von [2, 4] angehören. Jede Gerade in der Leitebene kann als Leitgerade eines in [2, 4] enthaltenen Systems [1, 4] dienen und daraus geht hervor, dasz Ω von Σ_8^* in jedem Punkt der Ebene Λ_2 berührt wird. Wir können nur der Ebene mit den Koordinaten α_{kl} von S_4 die Hyperebene mit der Gleichung (1.11) zuordnen und haben dann gefunden:

12. *Die den Ebenen von S_4 zugeordneten Hyperebenen von Σ_9 sind die Tangentialhyperebenen von Ω .*

Wir werden sehen, dasz auch das Umgekehrte zutrifft. Zu dem Zweck betrachten wir eine Hyperebene Σ_8 mit der Gleichung:

$$\sum_{k < l} \alpha_{kl} \xi_{kl} = 0 \dots \dots \dots \dots \quad (1, 12)$$

Wir definieren die Zahlen α_{kl} mit $k > l$ durch die Festsetzung $\alpha_{kl} = -\alpha_{lk}$ und die Zahlen α_{kl} mit $k = l$ durch $\alpha_{kk} = 0$. Dann ist die aus den Koeffizienten und den soeben erhaltenen Zahlen α_{kl} gebildete Matrix

$$\| \alpha_{kl} \| \dots \dots \dots \dots \quad (1, 13)$$

schiefsymmetrisch und die daraus hervorgehende fünfreihige Determinante verschwindet. Wir wollen nunmehr annehmen, dasz der Rang der Matrix 4 beträgt. Als nächste Aufgabe untersuchen wir unter welchen Bedingungen ein in Ω enthalter Raum Λ_3 zu der gegebenen Hyperebene Σ_8 gehört. Ein solcher Raum ist offenbar bestimmt durch den Punkt von S_4 , der als Zentrum des Sternes auftritt, dessen Bild eben Λ_3 ist. Es seien a_i , ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) die Koordinaten dieses Punktes. Dann kann man sichtlich jedem Punkt von Λ_3 die Koordinaten

$$\alpha_{kl} = a_k x_l - a_l x_k, \quad (k < l) \dots \dots \dots \quad (1, 14)$$

erteilen, wobei die x_m Variablen sind, welche nicht gleichzeitig den Wert Null annehmen. Im allgemeinen wird Λ_3 die Σ_8 in einer Ebene schneiden. Es wird aber Λ_3 ganz in Σ_8 enthalten sein, wenn

$$\sum_{k < l} \alpha_{kl} (a_k x_l - a_l x_k) = 0,$$

oder

$$\sum_{k, l} \alpha_{kl} a_k x_l = 0, \dots \dots \dots \dots \quad (1, 15)$$

identisch in den x_l . Dann müssen aber die fünf Gleichungen:

$$\sum_k \alpha_{kl} a_k = 0, \quad (l = 0, 1, 2, 3, 4), \dots \dots \dots \quad (1, 16)$$

erfüllt sein. Diese Gleichungen haben wegen der über den Rang der Matrix (1.13) gemachten Voraussetzung genau eine nicht-triviale Lösung und man rechnet leicht nach, dasz vermöge der über die Koeffizienten gemachten Festsetzungen für die a_k die Ausdrücke

$$a_i = \alpha_{kl} a^{mn} + \alpha^{km} a^{nl} + \alpha^{kn} a^{lm} \dots \dots \quad (1, 17)$$

genommen werden können. Dabei durchlaufen (i, k, l, m, n) wiederum die geraden Permutationen der Zahlen (0, 1, 2, 3, 4). Wir werden die Matrix (1.13) als die zu der Hyperebene (1.12) gehörige Matrix bezeichnen. Es besteht der Satz:

13. Wenn die zu einer Hyperebene Σ_8 gehörige Matrix den Rang 4 hat, gibt es genau einen Raum Λ_3 der in Σ_8 enthalten ist.

Wir folgern daraus, dass unendlich viele Λ_3 in einer Tangentialhyperebene liegen, da schon ∞^1 dieser Räume in jedem der berührenden Σ_6^* liegen, welche in der Hyperebene enthalten sind. Dann muss aber wegen der schiefen Symmetrie der Matrix deren Rang 2 betragen und daraus geht hervor, dass die Ausdrücke (1, 17) sämtlich verschwinden. Man kann dann aber die Zahlen akl , ($k < l$), als die Hyperebenenkoordinaten einer Ebene von S_4 auffassen, welche der Tangentialhyperebene zugeordnet ist. Wir erkennen daraus:

14. Die Ebenen von S_4 korrespondieren umkehrbar eindeutig mit den Tangentialhyperebenen von Ω in Σ_9 . Inzidenz von Gerade und Ebene in S_4 ist gleichbedeutend mit Inzidenz von Bildpunkt und zugeordneter Tangentialhyperebene in Σ_9 . Es besteht vollständige Dualität zwischen den Punkten und den Tangentialhyperebenen von Ω .

Wir können von diesem Satz sofort eine Anwendung geben. Durch duale Uebertragung erfolgt aus dem Satz 4, dass es lineare Systeme von ∞^3 Tangentialhyperebenen gibt, wobei jedes System aus denjenigen Hyperebenen besteht, welche den Ebenen einer im S_4 liegenden S_3 zugeordnet sind. Die ∞^3 Tangentialhyperebenen eines solchen Systems haben einen 5-dimensionalen Raum Σ_5^* gemeinsam. Die Schnittmannigfaltigkeit von diesem Σ_5^* mit Ω besteht aus den Bildpunkten der Geraden von S_4 , die in einem S_3 enthalten sind, also der Geraden eines Gebildes [2, 3]; denn diese sind ja die Geraden, welche mit allen Ebenen von S_3 inzident sind. Daraus erhellst, dass die Mannigfaltigkeit die Dimension 4 und wegen $g(2, 3) = 2$ den Grad 2 hat. Man ersieht weiter ohne Mühe, dass diese quadratische Mannigfaltigkeit nicht singulär ist; sie ist die bekannte KLEINSche Mannigfaltigkeit. Man zeigt umgekehrt in entsprechender Weise, dass jede KLEINSche Mannigfaltigkeit auf Ω als Durchschnitt von Ω mit einem Σ_5 erhalten wird, welcher einem linearen System von ∞^3 Tangentialhyperebenen gemeinsam ist. Es gilt nun folgender Satz:

15. Durch ein nicht auf Ω liegender Punkt geht genau ein 5-dimensionaler Raum, welcher Ω in einer KLEINSchen Mannigfaltigkeit schneidet.

Die Richtigkeit dieses Satzes geht durch duale Uebertragung aus dem Satz 13 hervor.

Wir wollen nun beweisen, dass jede 4-dimensionale quadratische Mannigfaltigkeit auf Ω eine KLEINSche Mannigfaltigkeit ist. Es sei Σ_5 der Raum, zu dem eine solche Mannigfaltigkeit Ω_4^2 gehört¹¹⁾. In diesem Σ_5 nehmen wir einen Punkt α , der nicht auf Ω_4^2 liegt. Aus dem soeben genannten Satz folgt, dass es durch α einen Σ_5^* gibt, welcher Ω in einer KLEINSchen Mannigfaltigkeit schneidet. Wenn diese nicht die Ω_4^2 wäre, dann würden Σ_5 und Σ_5^* nicht zusammenfallen. Es gäbe daher in Σ_5 durch α eine Gerade, welche mit Ω zwei Punkte gemeinsam hätte und nicht in Σ_5^* läge; dadurch wäre aufs neue ein den Punkt α enthaltender Σ_5^* bestimmt, der Ω in einer KLEINSchen Mannigfaltigkeit schneidet. Denn zwei Punkte auf Ω , die nicht auf derselben Ω angehörigen Geraden liegen sind die Bildpunkte zweier windschiefer Geraden in S_4 und diese bestimmen ein Gebilde [2, 3]. Damit hätten wir zwei Σ_5^* durch α gefunden, welche Ω je in einer KLEINSchen Mannigfaltigkeit schneiden, im Widerspruch zu Satz 15. Wir können das Ergebnis folgendermassen zusammenfassen:

16. Den Geradengebilden [2, 3] in S_4 sind die zu Ω gehörigen quadratischen 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten umkehrbar eindeutig zugeordnet. Durch irgendeinen nicht auf Ω liegenden Punkt geht genau ein 5-dimensionaler Raum Σ_5^* welcher Ω in einer 4-dimensionalen quadratischen Mannigfaltigkeit schneidet.

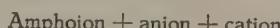
¹¹⁾ Der Fall, dass Ω_4^2 aus einer doppeltzählenden Σ_4 besteht, scheidet offenbar mit Rücksicht auf Satz 6 sofort aus.

Biochemistry. — *Some instances of tricomplex flocculation. I. Soybean phosphatide + carraghene + crystalloid cation.* By H. G. BUNGENBERG DE JONG and C. H. RERING. (Communicated by Prof. H. R. KRUYT.)

(Communicated at the meeting of May 30, 1942.)

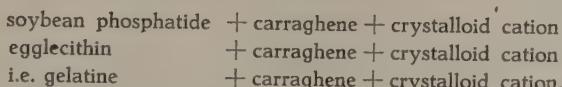
1. Introduction.

In the second part of a survey called: "Complex systems of biocolloids" ¹⁾ we gave some details of the theory of the so-called "tricomplex systems", colloid systems for the formation of which three charged components:

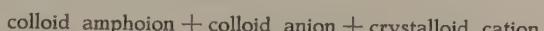


are essential ²⁾.

In this survey such a theoretical discussion was possible, as we had already experimental material at our disposal concerning some significant instances of tricomplex flocculation, namely:



These instances belong to the special case:



They are biologically especially interesting, because here these tricomplex systems can be formed with Ca^{++} , whereas they are not possible with K^+ (sometimes not with Na^+). There is also pronounced antagonism between CaCl_2 and KCl , CaCl_2 and NaCl resp. Thus far, however, circumstances prevented the publication of this experimental material. In this and the following two Communications a survey will therefore be given in this place.

In this first Communication the first mentioned instance will be discussed.

As starting material for the preparation of the soybean phosphatide sol we used "Planctin alsohöllöslich 90—95 %" of J. D. RIEDEL, E. DE HAËN, A. G. BERLIN.

4.5. gr. of this preparation was dissolved in 30 cc petroleum aether and after filtration 28 cc of this solution was precipitated with 280 cc aceton. The precipitation was dissolved in 14 cc aether and precipitated with 140 cc aceton, the precipitation was dissolved in 35 cc aethyl alcohol and squirted in a thin jet into 170 cc dist. water, while the mixture was being stirred very vigorously. The transparent sol obtained was placed in a dialysator, a large funnel (diameter 36 cm) which was closed with a thin cellophane membrane ³⁾ and was rocked continuously in a large dish of dist. water (volume 10 l, replaced after 4 hours). 8 hours dialysis practically freed the sol from alcohol. The very slight opalescence of the sol increases a little during the process, while owing to hydration the volume increases slightly (e.g. sol I 200 cc \rightarrow 247.5 cc, sol II 200 cc \rightarrow 245 cc).

The concentrations of the individual sols differed slightly e.g.:

sol I: 0.454 %, sol III: 0.451 %, sol V: 0.52 %.

¹⁾ H. G. BUNGENBERG DE JONG, Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **41**, 776, 788 (1938).

²⁾ H. G. BUNGENBERG DE JONG and G. G. P. SAUBERT, Biochem. Z. **288**, 1, 13 (1936).

³⁾ In order to obtain a tightly stretched membrane it should be mounted wet and left to dry in the air. With the large diameter of the funnel (36 cm) however, the membrane was usually torn in drying. This inconvenience was prevented by soaking the membrane not in dist. water, but in a water alcohol mixture (1:1) before mounting it.

In the following prescriptions we shall only indicate the individual sols as "phosphatide sol 0.5 %" with the addition of the roman numeral. For the preparation of the Na-carraghene see "Kolloid Beih." 47, 262 (1938).

From the air-dry preparation we obtained a ca. 0.1 % sol by shaking (0.2025 gr. air dry preparation shaken with 200 cc dist. water, during the night).

2. *Specific differences of the cations as regards the tricomplex flocculation phosphatide + carraghene + crystalloid ion.*

The dialysed phosphatide sol, when mixed with a solution of CdCl_2 , ZnCl_2 , AgNO_3 , MgCl_2 , CaCl_2 , SrCl_2 , BaCl_2 , LiCl , NaCl , KCl resp., does not flocculate, there is not even any considerable increase of the slight opalescence.

The carraghene sol behaves in the same way, at most a slight increase of the opalescence occurring with KCl .

Neither is there flocculation or turbidity when the phosphatide sol is mixed with the carraghene sol.

Fig. I curve „blank” shows the effect of CaCl_2 on a mixture of the phosphatide sol + the carraghene sol. The other curves of Fig. I can be compared direct with the blank

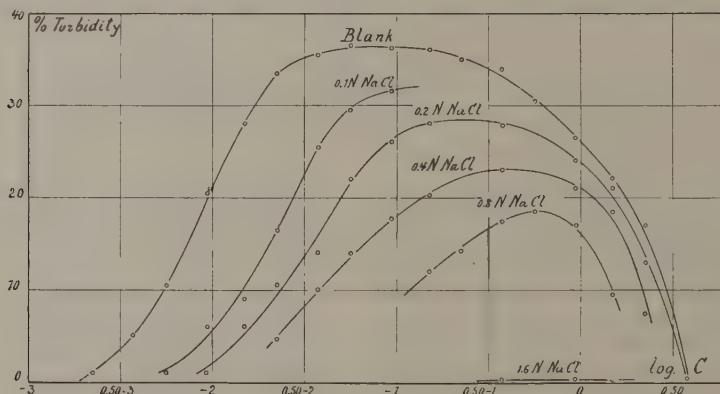


Fig. 1

curve, but now there is NaCl present, of which the concentration increases but is kept constant for each curve.

In preparing the mixtures we proceeded as follows: first we prepared a mixed sol by mixing 2 vol. phosphatide sol 0.5% I with 1 vol. 0.1 % Na carraghene sol, pipetting 2 cc of it to 23 cc mixtures prepared beforehand:

a cc CaCl_2 solution + (23—a) cc dist. water (blank)

a cc CaCl_2 solution + bcc NaCl solution + (23—a—b) cc dist. water (remaining curves).

Addition b was chosen so that the final NaCl concentrations were 0.1; 0.2; 0.4; 0.8; 1.6 N resp.¹⁾

In the 6 series measured thus we varied a and the strength of the CaCl_2 solution in such a way that the CaCl_2 final concentrations varied over a very large concentration section (from ca. 0.001 N to ca. 4 N). Therefore the logarithms of the concentrations have been set out along the absciss in Fig. 1 and in the following figures (so in Fig. 1 $\log C_{\text{CaCl}_2}$).

1) The measuring was done 30 min. after the addition of the sol mixture, after each tube had been well shaken just before measuring, so that any sediment floccules were divided equally over the liquid. Immediately after shaking the turbidity was measured as quickly as possible, before sedimentation had again set in.

Fig. 1 curve blank shows that already at small CaCl_2 concentrations ($\log C = 0.50-3$, i.e. $C = \text{ca. } 3 \text{ m.aeq. pL}$) the sol mixture begins to flocculate, that the flocculation is about maximal in the section of ca. 30–300 m.aeq. pL ($\log C = 0.50-2$ to $0.50-1$), decreasing to 0 with higher concentrations, ca. 300–4000 m.aeq. pL ($\log C = 0.50-1$ to 0.60). Fig. 1 also shows that NaCl counteracts flocculation with CaCl_2 , even entirely neutralising it with 1.6 N.

Fig. 2 gives the results of a comparison of the flocculation effect of MgCl_2 , CaCl_2 , SrCl_2 , BaCl_2 , LiCl , NaCl and KCl .

The preparation of the mixtures was the same as indicated above (2 cc mixed sol, from

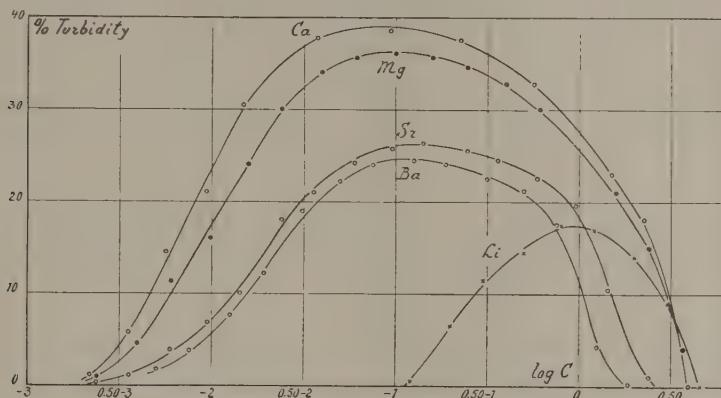


Fig. 2

2 vol. phosphatide sol 0.5% + 1 vol. carraghene sol 0.1% + a cc salt solution + (23-a) cc dist. water, measurement 30 min. after sol was added).

Fig. 2 shows that there are great specific differences between the bivalent cations. This is also true of the monovalent cations, as LiCl only causes flocculation, the sol mixtures remaining perfectly clear with NaCl and KCl .

So we find the following series for flocculation decreasing from left to right



As from a theoretical point of view it is desirable also to know the order of Na and K we also compared LiCl , NaCl and KCl in the presence of 25 vol % aethyl alcohol.

In order to obtain greater turbidity we did not use 2 but 4 cc sol mixture to 25 cc final volume (4 cc sol mixture from 2 vol. phosphatide sol 0.5% V with 1 vol. carraghene sol 0.1 cc + 6 cc alcohol + a cc salt solution + (15-a) cc dist. water).

The result of these measurements is shown in Fig. 3. It appears that LiCl and NaCl both produce considerable flocculation, but the turbidity is slight with KCl .

Control experiments with only phosphatide sol and with only carraghene sol both with 25 vol % alcohol convinced us that no turbidity arises in the phosphatide sol with LiCl NaCl and KCl , neither in the carraghene sol with LiCl and NaCl . But there is slight turbidity of the carraghene sol with KCl , which is about as strong as the one which was produced with the sol mixture in Fig. 3.

So we conclude that the flocculations produced with LiCl and NaCl are typical tricomplex flocculations, but that KCl has not this power (the slight flocculation which occurs is owing to the flocculation of carraghene with K in a medium containing 25 % alcohol).

We may therefore conclude that the order of a tendency to tricomplex flocculation decreasing from left to right is



In a watery medium we also found in separate experimental series (with phosphatide sol VI)

$\text{Ag} > \text{Li}$ (Fig. 4a) and $\text{Cd} > \text{Ca}$ (Fig. 4b).

By comparing the curves with each other (degree of the max. turbidity) we arrive at

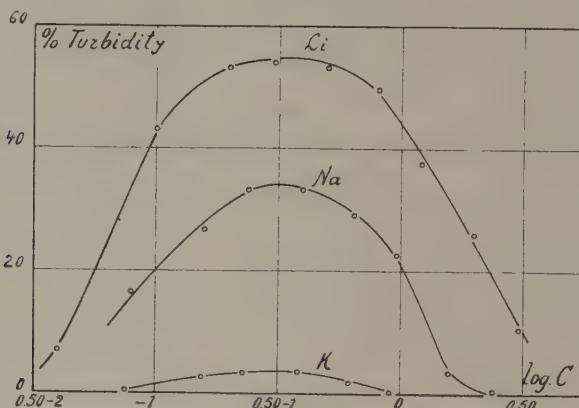


Fig. 3

the following series of a tendency to tricomplex flocculation, decreasing from left to right:

$\text{Cd} > \text{Ca} > \text{Mg} > \text{Ag} > \text{Sr} > \text{Ba} > \text{Li} > \text{Na} > \text{K}$.

There was no indication that tricomplex flocculation can be realized with K ions.

3. *Measurement of the reversal of charge concentrations and explanation of the cation order found in 2.*

With the aid of the technique described in detail elsewhere¹⁾, (microscopic cuvette, measurements at $1/5$ height, SiO_2 powder as electrophoretic indicator) we determined the reversal of charge concentrations of the salts used in 2, with the phosphatide sol (5 cc $1/2\%$ to 50 cc final volume) and with carraghene sol (5 cc 0.1% to 50 cc final volume), separately for each sol.

Figures 5 and 6 give some of the interpolation graphs obtained²⁾. From it we have taken the logarithms read of the reversal of charge concentrations, mentioned in columns 2 and 3 of Table I (the extrapolated values are placed in brackets).

We shall not further discuss here the location with regard to each other of the reversal of charge concentrations with the carraghene sol, resp. the phosphatide sol separately. It is sufficient to state here that the sequences are in agreement with previous measurements, and that they were discussed in detail elsewhere³⁾.

It was seen that the sequences may be explained from the difference in polarizability

¹⁾ H. G. BUNGENBERG DE JONG and P. H. TEUNISSEN, Kolloid Beihefte **47**, 254 (1938) compare p. 265—274.

²⁾ Here we used a cuvette with auxiliary electrodes in order to measure the potential gradient during the measurements. The electrophoretic velocities (U) in Figures 5 and 6 have been corrected for the same potential gradient per cm. This causes the U - $\log C$ curves to be nearly straight lines, which is necessary for the interpolation and especially for the extrapolation unavoidable with some salts (on account of their insufficient solubility). The extrapolated parts of the curves on the right top of the curves, indicated by a dotted line, are thus extrapolated linearly. The dotted parts at the left lower end of some curves probably represent a yet incomplete covering of the SiO_2 particles with a colloid film.

³⁾ H. G. BUNGENBERG DE JONG and P. H. TEUNISSEN, Kolloid Beihefte **48**, 33 (1938).

TABLE I.

Salt	log of the reversal conc.		$\log \frac{C_{\text{carraghene}}}{C_{\text{phosphatide}}}$	Maximal turbidity ¹⁾
	Carraghene	Phosphatide		
KCl	(0.81)	(0.70)	0.11	— (3.5)
NaCl	(0.88)	0.47	0.41	— (34)
LiCl	(1.00)	0.00	1.00	18 (54)
BaCl ₂	(0.60)	0.13—1	1.47	25
SrCl ₂	0.70	0.06—1	1.64	27
AgNO ₃	(0.86)	0.95—2	1.91	34.5
MgCl ₂	0.86	0.70—2	2.16	37.5
CaCl ₂	0.84	0.59—2	2.25	40
CdCl ₂	0.70	0.13—2	2.57	43

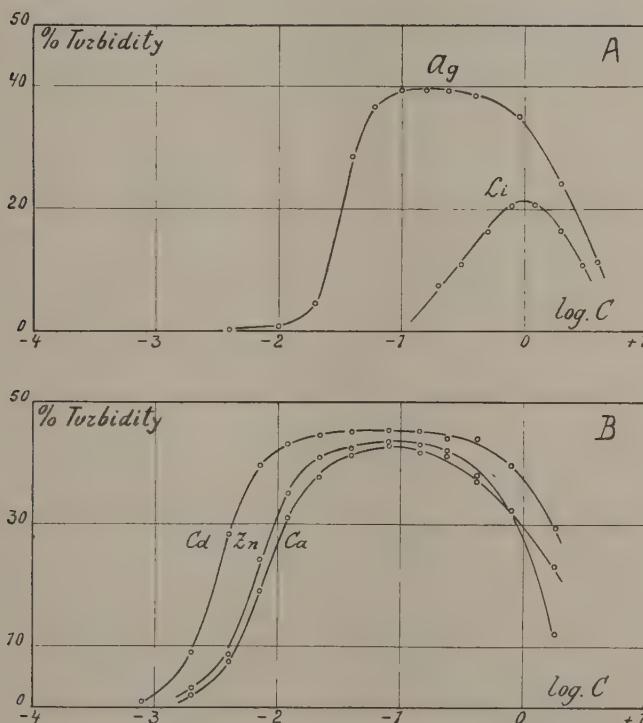


Fig. 4

¹⁾ The values placed in brackets refer to a medium of 25 vol % alcohol (Fig. 3) the others to a watery medium. As for the latter experiments different sol individuals were used, the maximal turbidities have been calculated from each other, with as basis a maximal turbidity of the Ca flocculation of 40 % so the turbidities of Mg, Sr, Ba and Li mentioned in the table were obtained from Fig. 2 by multiplying the values read there by 40/38.5 (38.5 is the max. turbidity of CaCl₂ in Fig. 1). The value for Ag in Fig. 4a was obtained by taking 18/22.5 times the max. value read (22.5 is here the max. turbidity of Li) in the same way we obtained the Cd value by multiplying the value read in Fig. 4b, 45.5 by 40/42.5 (the max. value of CaCl₂ is here 42.5).

of the negative ionized groups. This difference in polarizability is of the greatest significance, however, for the formation of the tricomplex systems. It appears from theoretical considerations (see the publication mentioned in the introduction), that for the formation of these systems it is conducive when the negative group of the amphoion (here the phosphatide¹) is more polarizable than the negative group of the anion

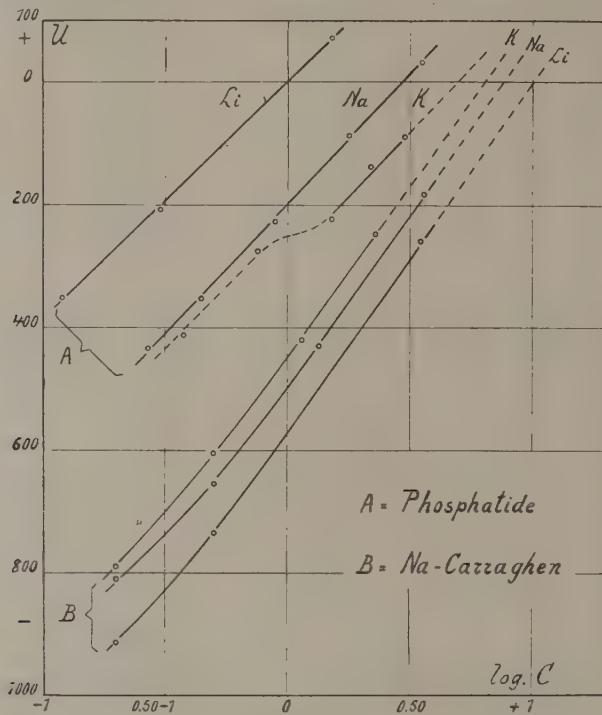


Fig. 5

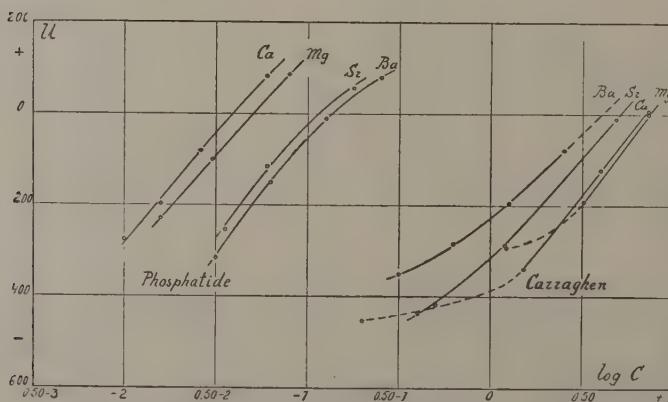


Fig. 6

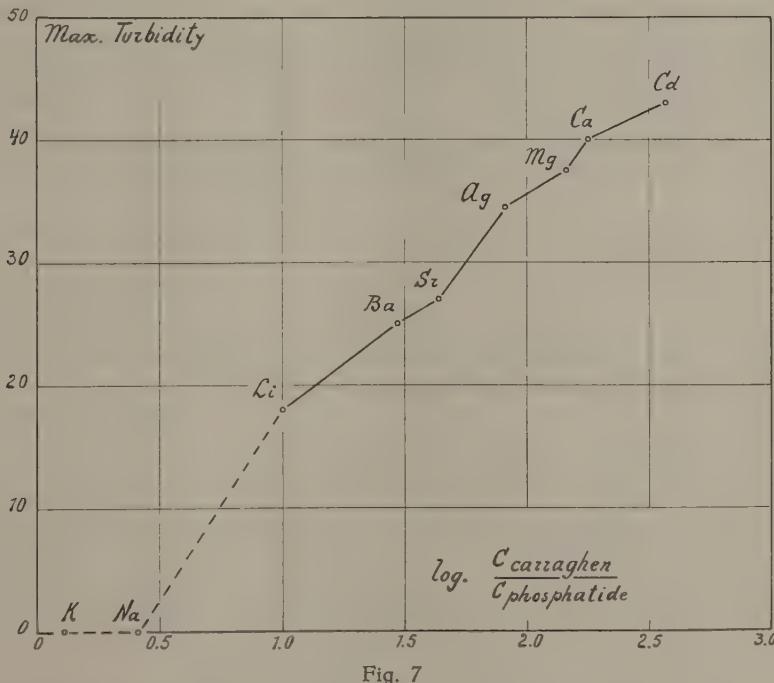
¹) Although the phosphatide used here is negatively charged (owing to phosphatidic acid) the greater part yet consists of phosphatide amphoions.

(here the colloid anion of carraghene with ester sulphate groups): In the publication mentioned it has also been discussed in how far the "ionspectra" of the two colloids are of importance for the specific differences, which are so predominant among the inorganic cations with regard to the tricomplex flocculation.

It is seen there that these ionspectra are not themselves determinant but that the value of the quotient of the reversal of charge concentrations of both colloids with the same cation determines the tendency to tricomplex flocculation. As a matter of fact this is reflected in Table 1, column 1 where we have arranged the salts in such a way beneath each other as agrees with the increasing tendency to tricomplex flocculation (see the cation series found in 2).

When each time we subtract the values of column 3 from those placed by the side of them in column 2, we obtain column 4, the logarithms of the quotients of the reversal of charge concentrations mentioned above. As a matter of fact we see that these values in col. 4 also increase from top to bottom. The connection is also expressed in Fig. 7, in which we have set out the maximal turbidity in a watery medium against the values of column 4.

Apparently the value of the quotient is too slight for K and Na to cause tricomplex flocculation in a watery medium. In 25% alcohol tricomplex flocculation may still be produced with Na, but not with K (see the turbidity figures placed in brackets in the last column of the table).



4. Neutralization of the Ca, Li tricomplex flocculation respectively with salts of type 1—1.

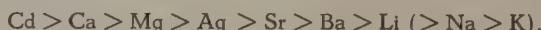
With other complex systems tricomplex flocculation has this characteristic in common, that neutral salts in general have a neutralizing effect. This is already indicated by the curves of Figures 1, 2 and 3, where the same salts which smaller concentration cause tricomplex flocculation, neutralize it in greater concentrations. But this also happens on addition of another salt (e.g. NaCl in Fig. 1). The neutralization of the approximately

maximal CaCl_2 , resp. LiCl flocculation by salts of type 1—1 has been investigated systematically.

We shall however delay the discussion and the explanation of the specific sequences found of cations and anions to a subsequent communication, in which we shall find the same results for the cations and more evident spreading of the anions with the tricomplex flocculation egglecithin + carraghene + crystalloid cations, to be discussed there.

Summary.

1. In mixtures of soybean phosphatide sol, soluble in alcohol (negative, but consisting mainly of phosphatide amphotions) and carraghene sols (negative) a number of salts of types 1—1 and 2—1 cause flocculation.
2. The tendency to flocculation of the sol mixture decreases in the following series from left to right



In a watery medium Na and K cause no flocculation, the order placed in brackets appeared from an investigation in 25 vol. % alcohol.

3. Electrophoretic measurements show that the same sequence as in 2 is obtained for the value of the logarithms of the quotient of the reserval of charge concentrations of the two sols separately with the salts mentioned.

4. The results obtained in 2 and 3 are in agreement with the opinion that the flocculation is tricomplex, so that as real components of the flocculation we can consider: the phosphatide amphotion, the carraghene colloid anion and the crystalloid cation used for the flocculation.

Leiden, Laboratory for medical chemistry.

Biochemistry. — *Some instances of tricomplex flocculation. II. The flocculation of egglecithin and carraghene sols with crystalloid cations.* By H. G. BUNGENBERG DE JONG and C. H. RERING. (Communicated by Prof. H. R. KRUYT).

(Communicated at the meeting of May 30, 1942.)

1. *Preparation of the lecithin and carraghene sols.*

For the preparation of the lecithine sols we started from lecithinum ex ovo puris. of "Kahlbaum". 6 gr. of this preparation was dissolved in a tap funnel in 60 cc alcohol + 60 cc aceton and then precipitated with 60 cc dist. water. After whirling the liquid the double refracting precipitation is collected in the froth on top and the main mass of the remaining liquid can be removed by opening the tap. The precipitate is then washed in the funnel with a mixture of 30 cc alcohol + 30 cc aceton + 30 cc H_2O ; after removing the washing liquid the precipitate is dissolved in 10 cc aether, the lecithin is then precipitated with 30 cc aceton, after which the superfluous liquid is removed. The latter process with aether and aceton was then repeated twice. The precipitate is then dissolved in 40 cc aethyl alcohol and with the aid of the apparatus described previously¹⁾ and while the solution is being vigorously stirred it is squirted in a thin jet at 70° c into 160 cc dist. water. Then follows dialysis in a dialysator of the type described in the 1st Communication of this series, during 4 hours against 4 l dist. water, and after the water has been replaced by fresh, again during 16 hours. During the dialysis the sol volume increases (e.g. with sol 1 from 200 cc to 252 cc). The sols thus obtained are more opalescent than the sols from soybean phosphatide, however, in a layer of 10 cm they are still quite transparent. The concentration of these sols varied a little, but was about 0.5 %. The carraghene sols of ca. 0.1 % were prepared as described in the first Communication of this series.

2. *Specific effect of the cations in tricomplex flocculation: Egglecithin + carraghene + crystalloid cation.*

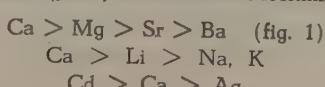
The lecithin sol, when mixed with a solution of $CdCl_2$, $AgNO_3$, $MgCl_2$, $CaCl_2$, $SrCl_2$, $BaCl_2$, $LiCl$, $NaCl$, KCl resp. does not flocculate. The carraghene sol behaves in the same way. Neither is there flocculation when the phosphatide sol is mixed with the carraghene sol.

It appears that of the salts examined Ag , Cd , Mg , Ca , Sr , Ba , Ag and Li cause flocculation of the solmixtures but that they remain perfectly clear with Na and K .

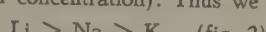
In these combinations we again start from the clear mixture of 2 vol. egglecithin sol + 1 vol. carraghene sol. The composition of the mixtures, the turbidity of which was measured after 30 min. was:

a cc salt solution + (23—a) cc dist. water + 2 cc sol mixture, the salt itself, value a and the concentration of the salt solution added being varied.

In a number of different series (partly with different lecithin sol individuals) we found:



In order to determine the sequence of ions Na and K which do not flocculate in a watery medium, we used a weak alcohol containing medium, as in Comm. I (25 vol % alcohol and 2 cc sol mixture in 25 cc final concentration). Thus we found the order:



¹⁾ BUNGENBERG DE JONG and WESTERKAMP, Biochem. Z. 234, 347 (1931).

So here there is weak tricomplex flocculation also with KCl, in contradistinction to the behaviour of the soybean phosphatide, where it did not occur.

Owing to the greater variation of the concentration of the individual lecithin sols and the greater variability of these sols in course of time, it was not possible to get the same

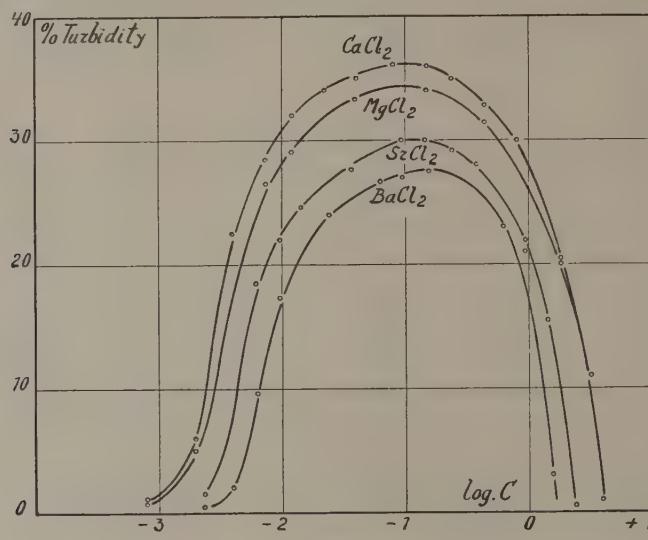
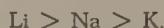


Fig. 1.

certainty as in Comm. I for the soybean phosphatide, of the sequence of all the cations mentioned, from a comparison of the maximal turbidity, but we have certainty as to the sequence of the bivalent cations with



and of the monovalent cations with



The sequences are the same as found in Comm. I and are to be expected here on the

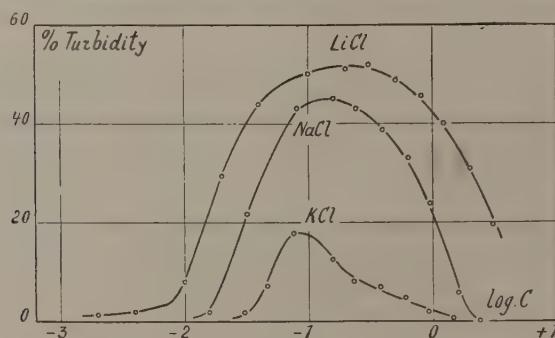
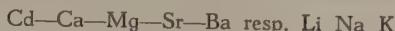


Fig. 2.

following grounds: in Comm. I we saw that the tendency to tricomplex flocculation is theoretically dependent on the value of $\log \frac{C_1}{C_2}$ in which C_1 is the reversal of charge concentration of the caraghene sol and C_2 the reversal of charge concentration of the phosphatide sol.

As the spreading of values C_1 is comparatively small for the various cations, whereas the spreading of values C_2 is very considerable, the sequence of the values $\log \frac{C_1}{C_2}$ for the various cations is practically determined by the order of the values of C_2 . This is apparent when in Table 1 of Comm. I columns 3 and 4 are compared. The sequence of the cations for which $\log \frac{C_1}{C_2}$ increases is there actually the same as in which $\log C_2$ decreases.

As according to previous measurements¹⁾ the reversal of charge concentrations of egglecithin sols also increase from left to right in the following series:



it may be expected that in these orders the degree of tricomplex flocculation must decrease from left to right.

3. Is the anion of the salt used for the tricomplex flocculation indifferent?

According to the theory we have advanced that the flocculations occurring here are tricomplex, three charged components:

colloid amphion + colloid anion + crystalloid cation are real and hence it would be immaterial if we cause flocculation with CaCl_2 , $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$, CaBr_2 etc.

We may add the following details: the salt curves are in general maximum curves and the indifference mentioned is to be expected most for the left ascending branch of the curves. For the right descending branch (with higher concentration) the generally neutralizing effect of the salts is ever more apparent which is characteristic of salts for complex systems (so here too for the salt which in smaller concentration caused the tricomplex flocculation). As with the neutralizing effect both ions of a salt are active, it is possible that in the right hand curve branches there is a spreading dependent on the anion chosen. When we choose a comparatively weak tricomplex causing cation (e.g. Li), there is the possibility that the anion spreading mentioned last will also manifest itself in the left ascending branch.

But it may be expected that the latter spreading will be much slighter or entirely absent when we choose a strong tricomplex causing cation (e. g. Ca).

So we chose for the experiment a simultaneous comparison of salts CaCl_2 , CaBr_2 , CaJ_2 , $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$ and $\text{Ca}(\text{CNS})_2$, dividing the programme over two working days. On the first day a comparison of the salts was made of the left ascending curve branch (concentration section from 0.7—100 m.aeq.p.l.), on the second day we made a comparison of the right descending branch (concentration section from 100—3500 m.aeq.p.l.).

In conformity with the expectation mentioned above we found of the left ascending branch that the individual salt curves come together within the experimental error: $\text{CNS} = \text{J} = \text{Br} = \text{NO}_3 = \text{Cl}$.

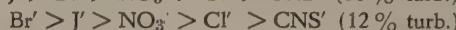
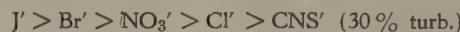
Of the right descending branch specific differences did indeed occur between the anions, the character of which at first sight seems complicated (see Fig. 3 in which the right descending branches are pictured, connected with it on the left — dotted — the ascending branch, alike for all the salts, the separate measuring points being omitted).

As we shall see in the following section, on neutralization with salts of type 1—1 of tricomplex flocculation produced with a constant quantity of Ca or Li the following sequence occurs:



¹⁾ H. G. BUNGENBERG DE JONG and P. H. TEUNISSEN, Kolloid Beihefte **48**, 33 (1938). Actually the tricomplex flocculation with all the sols mentioned should be measured simultaneously with one lecithin sol individual, in order to arrive at the composition of an uninterrupted series, which is not feasible.

This order is actually also to be expected for the descending branches of Fig. 3. But with a turbidity of ca. 30%, 12% resp. the order is here:



that is, the CNS in the series has shifted to the extreme right, and with higher salt

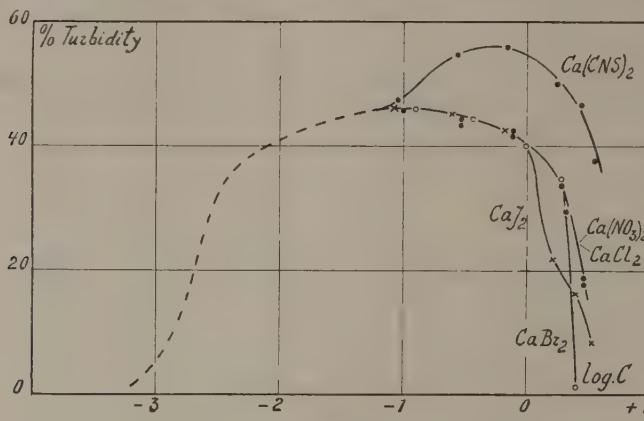


Fig. 3.

concentrations the J ion has also this tendency to shift to the right in the anion series.

Such abnormal behaviour of the CNS and the J ion is to be expected, if the effect of the ions is not exclusively a neutralizing one, but if they also have a tendency to cause with the phosphatide and the Ca ion a tricomplex flocculation of type:

colloid amphion + crystalloid anion + crystalloid cation.

This tendency must be very pronounced in the CNS' ion, and in a lesser degree it must also exist in the J' ion.

This tendency does indeed exist, as is seen from the occurrence of flocculation of the egglecithin sol itself, so in the absence of carraghene, with $Ca(CNS)_2$ and CaJ_2 compare Fig. 4, which refers to mixtures of this composition:

a cc salt solution + (23-a) cc H_2O + 2 cc (2 vol lecithin sol + 1 vol dist. H_2O).

This, therefore, accounts for the anion spreading of Fig. 3.

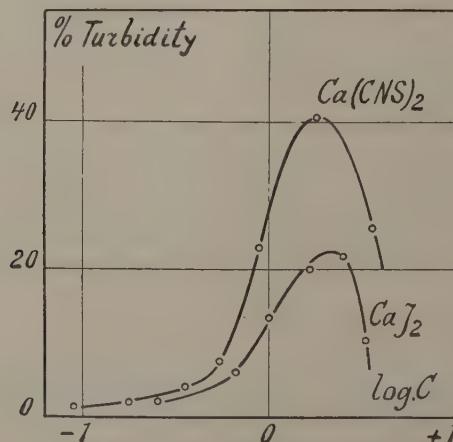


Fig. 4.

4. Specific cation and anion sequences on the neutralization of Ca, Li resp. tricomplex flocculation.

In what follows we shall restrict ourselves to the neutralizing effects of salts of type 1—1 near the maximal Ca resp. Li tricomplex flocculation¹⁾. We always added 2 cc sol mixture (2 vol phosphatide sol + 1 vol carraghene sol) to 25 cc final volume.

We began with the experiments announced in Comm. I concerning the tricomplex flocculation with *soybean phosphatide*.

Fig. 5a refers to the neutralization of the CaCl_2 flocculation by LiCl , NaCl and KCl (1 cc CaCl_2 1 N + 2 cc sol mixture 2 : 1 + a cc salt solution + (22—a) cc dist. water);

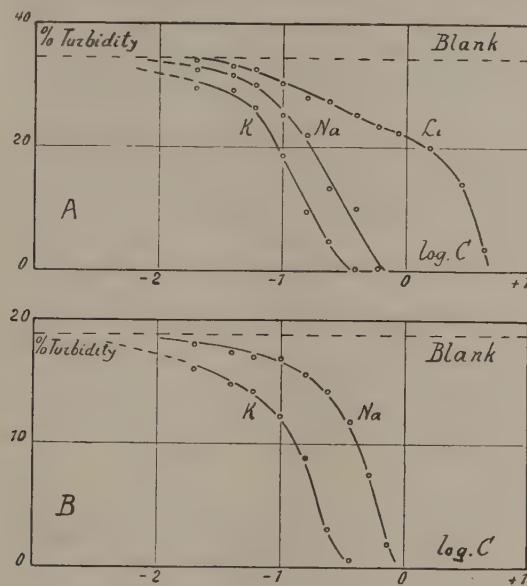
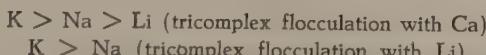


Fig. 5.

similarly Fig. 5b refers to the neutralization of the LiCl flocculation through NaCl and KCl (5 cc LiCl 5 n + 2 cc sol mixture 2 : 1 + a cc salt solution + (18—a) cc dist. water). In these figures the turbidity of the mixtures in which there is only 1 cc CaCl_2 1 N resp. 5 cc LiCl 5 N is indicated by the dotted horizontal line. We see that the cations arrange themselves in the following series, the neutralizing effect decreasing from left to right:



In the same way as indicated above for the neutralization of the tricomplex flocculation with CaCl_2 by KCl , NaCl and LiCl we examined in a second series the neutralization by KCl , KBr , KJ , KNO_3 and KCNS and found that $\text{CNS} > \text{J} > \text{NO}_3, \text{Br}, \text{Cl}$.

So there is no evident difference between the three anions named last, while the neutralizing effect of J is a little stronger and that of CNS markedly stronger than the effect of J .

¹⁾ Properly speaking it was to be expected that on neutralization of the tricomplex flocculation the valence rule of the anions would also occur. Experiments concerning the neutralization of the CaCl_2 tricomplex flocculation with KCl , K_2SO_4 , $\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$, $\text{K}_4\text{Fe}(\text{CN})_6$ showed complications which are possibly owing to the tendency present in some of these anions (e.g. $\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$) of forming with phosphatide + Ca tricomplex systems of type colloid amphotion + crystalloid anion + crystalloid cation.

When we proceed to the neutralizing effect of the salts of type 1-1 on the complex flocculation with *egglecithin*, we find there the same cation sequences, while the spreading of the anions is more favourable here, so that the order of all five anions mentioned above now becomes known.

The procedure is entirely the same as described above, except the quantity of LiCl added (2 cc 5 N) to reach the maximal tricomplex flocculation. For the cations we find:

$K > Na > Li$ (tricomplex flocculation with Ca) see Fig. 6a

$K > Na$ (tricomplex flocculation with Li) see Fig. 6b

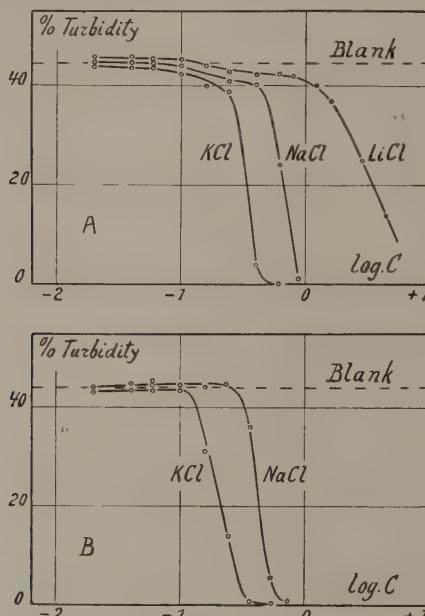


Fig. 6.

for the anions we find:

$CNS > J > Br > NO_3 > Cl$ (tricomplex flocculation with Ca) see Fig. 7a

$CNS > J > Br > NO_3 > Cl$ (tricomplex flocculation with Li) see Fig. 7b.

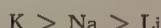
Previous investigations by BANK and HOSKAM¹⁾ now enable us to draw conclusions from these cation and anion sequences, concerning the way in which the added salt neutralizes the flocculation.

These investigators found namely that on the neutralization of complex flocculation the specific ion sequences occur which are also found on reversal of charge of each of the colloids participating in the complex.

On complexes to which, for instance, positive gelatine takes part they find on the neutralization:



that is to say the same order in which the reversal of charge concentration increases (i.e. the affinity of the anion for the colloid cation decreases)²⁾. The cation sequence on the neutralization of the complex gelatine (positive) + arabinate (negative) resp. + carraghene (negative) is:



¹⁾ O. BANK and E. G. HOSKAM, *Protoplasma*, **34**, 188 (1940).

²⁾ L. TEUNISSEN-VAN ZIJP, *Diss. Leiden* 1939.

that is to say the order in which from left to right with the carraghene as well as with the arabinate the reversal of charge takes place with greater difficulty (the affinity

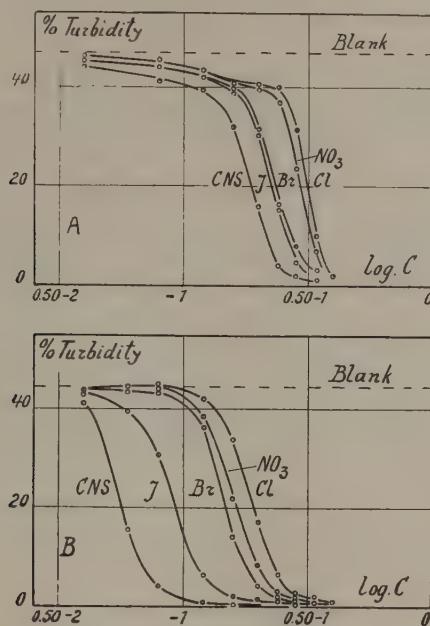


Fig. 7.

decreases). But on neutralization of the complex gelatine (positive) + nucleinate (negative) resp. phosphatide (negative) the sequence is

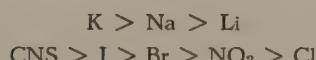


that is the order in which from left to right the reversal of charge of the two phosphate colloids takes place with greater difficulty (in other words the affinity of the cations to the phosphate group of the colloid decreases).

Returning to our problem we have however to consider that with the tricomplex systems there are three "salt-bonds". In the case of phosphatide + carraghene + Ca they are:

- Phosphate group of the phosphatide amphiion..... Ca.
- Quaternary ammonium group of the amphiion..... carraghene.
- Carraghene..... Ca.

By screening the addition of salts will cause each of these bonds to become weaker, so that the ultimate neutralization is the result of the three separate actions. But it is likely that the two bonds *a* and *c* (crystalloid ion-colloid) are much weaker and therefore more easily neutralized than bond *b* (colloid-colloid). If this is so the weakening of bond *b* must dominate the neutralization of the tricomplex flocculation through neutral salts, that is the specific sequences found:



must also fit in with the carraghene and the quaternary ammonium group of the phosphatide amphiion, in connection with the investigation by BANK and HOSKAM cited.

As a matter of fact the sequence in which the reversal of charge concentrations for carraghene increase is K—Na—Li, while it is highly probable that the order of decreasing affinity of the positive group of the phosphatide is for anions: CNS > J > Br >

$\text{NO}_3 > \text{Cl}$. For it is to be expected that this is the general affinity order for organic bases. Hence it is found with the positive gelatine.

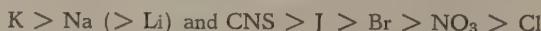
As a matter of fact there are sufficient instances known in organic chemistry in which the iodides and especially the rhodanides of bases are the most insoluble.

Summary.

1. The problems investigated in the first Communication were extended to the combination egglecithin + carraghene + crystalloid cation, practically identical results being obtained.

2. When tricomplex flocculation is brought about with a neutral salt the accompanying anion does not play a part.

3. On the neutralization of the tricomplex flocculation (with Ca , Li resp.) by neutral salts there are specific differences of the cations and anions:



which indicates that the neutralization is determined by the degree in which the bond between carraghene and the positive group of the phosphatide amphotion is weakened.

4. Egglecithin sol is flocculated by $\text{Ca}(\text{CNS})_2$ and CaJ_2 . This flocculation is of the tricomplex type: amphotion + crystalloid anion + crystalloid cation.

Leiden, Laboratory for Medical Chemistry.

Biochemistry. — *Some instances of tricomplex flocculation. III. The flocculation of gelatine + carraghene with alkali and earth alkali cations.* By H. G. BUNGENBERG DE JONG and C. H. RERING. (Communicated by Prof. H. R. KRUYT.)

(Communicated at the meeting of May 30, 1942.)

For the following experiments we started from a 3% sol of purified gelatine¹⁾ and a 0.1% sol of Na-carraghene²⁾.

When we mixed at 40° 11 cc dist. water with 4 cc 0.1% carraghene sol and 10 cc 3% gelatine sol, we obtained a mixture which, measured with the extictometer of MOL in a cuvette 10 mm deep, gave a turbidity of 4% (non-transmitted light). The same turbidity is obtained by mixing 15 cc dist. water with 10 cc 3% gelatine sol. So it is not caused by the interaction of gelatine and carraghene.

Neither does extra turbidity arise when CaCl_2 is added to the carraghene sol, to the gelatine sol resp. but CaCl_2 (and other salts see below) cause strong flocculation when gelatine as well as carraghene are present.

With the following experiments we left the mixtures 30 min. after preparation at 40°; then they were well shaken, so that any deposited flocs were divided equally over the liquid and then we measured the turbidity as quickly as possible in the extictometer.

We always kept a final volume of the mixtures of 25 cc, in which there was for the experimental series pictured in Fig. 1, 4 cc carraghene 0.1% and 10 cc gelatine 3%, but the salt concentration was greatly varied. In Fig. 1 the turbidity has been set out against

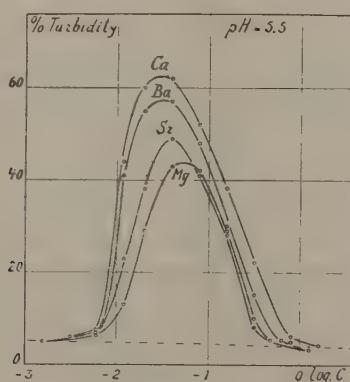


Fig. 1.

the logarithms of the salt final concentrations. We see here that on the turbidity level discussed above of ca. 4% (owing to the turbidity of the gelatine sol itself) a turbidity curve with a maximum is obtained with all four salts examined.

There are great differences between the salts (which are here of the same type, viz. 2-1) themselves, namely that the flocculation decreases from left to right in the following series:

$$\text{Ca} > \text{Ba} > \text{Sr} > \text{Mg.}$$

¹⁾ Gelatine F00 extra of the "Lijm- en Gelatinefabriek 'Delft'" at Delft. Preparation of the isoelectric gelatine see Koll. Beihefte **43**, 256 (1936).

²⁾ Na-carraghene preparation see Koll. Beihefte **47**, 262 (1938).

When with the same mixing proportion of gelatine and carraghene we make analogous experiments with LiCl, NaCl resp. KCl, only very slight turbidity is produced. So we can already state that the intensity of the flocculation with salts of type 1—1 is much less than with the salts mentioned of type 2—1. The turbidity obtained with salts 1—1 is too slight to conclude from it with any certainty the sequence of the monovalent cations.

We found that a different mixing proportion of the two colloids gives a better result, namely when in the final mixtures of 25 cc there is 12 cc 0.1% carraghene and 5 cc 3% gelatine. This experiment (Fig. 2) shows that also with alkali cations there are great

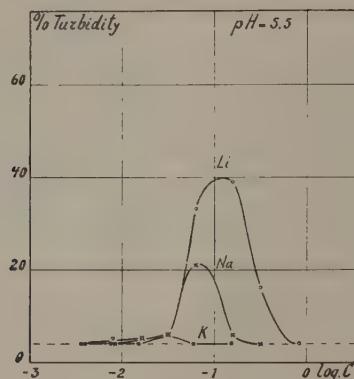


Fig. 2.

specific differences. The flocculation decreases from left to right (being even absent in K) in the order:



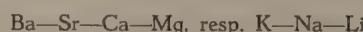
when we combine the results of the two series we get the order:



We also made electrophoretic measurements (microscopic cuvette, measurements at $\frac{1}{5}$ height) of the carraghene sol separately and of the gelatine sol separately (40°). The results obtained are given in the following table, where we give the logarithms of the reversal of charge concentrations (concentrations in equivalents p. L) in columns 2 and 3.

Salt	Log of the reversal of charge conc.		$\Delta \log C$
	Carraghene	Gelatine pH 5.5	
CaCl ₂	0.84	0.60—2	2.24
BaCl ₂	0.60	0.63—2	1.97
SrCl ₂	0.70	0.18—1	1.52
MgCl ₂	0.86	0.52—1	1.34
LiCl	1.00	0.32	0.68
NaCl	(0.88)	0.51	0.37
KCl	(0.81)	(>0.8)	negative

The reversal of charge concentrations united to so-called ion spectra are set out in Fig. 3 for earth alkali-chlorides (top) and for the alkali chlorides (bottom). The sequence obtained for the carraghene:



together with the slight valence effect, which appears from the little distance horizontally from the centre of gravity of the former (2-1) and of the latter (1-1) group, are in agreement with previous measurements. They are characteristic of a negative colloid with ionized groups (ester-sulphate) which are less polarizable than the watermolecule.

The sequences obtained for the (weakly negative) gelatine, Ca—Ba—Sr—Mg (a "transition" series) and Li—Na—K, besides the very pronounced valence influence (2-1 1-1), on the other hand, are indicative that the negative ionized groups of the protein (COO') are considerably more polarizable than the watermolecule¹⁾.

The theory of the flocculations advanced here of gelatine + carraghene with inorganic cations as *tricomplex flocculation* is in agreement with what has been discussed in the previous pages.

For a more detailed discussion of the nature of the tricomplex systems we must refer to a previous Communication²⁾ in which we have pointed out that it is favourable for the formation of these systems when the negative group of the amphoion (here gelatine near its I.E.P.) is better polarizable than the negative group of the anion (here the colloid anion: carraghene with ester sulphate groups). In the Communication mentioned we also discussed in how far the ion spectra of the two colloids can be of importance for specific differences which are so striking among the inorganic cations with regard to the tricomplex flocculation (Fig. 1 and 2).

It is there namely seen that these ion spectra are not themselves determining, but the distances between the place of an ion in the two ion spectra.

This is made clear in Fig. 3, where we must compare the lines drawn under the ion spectra, with regard to their lengths.

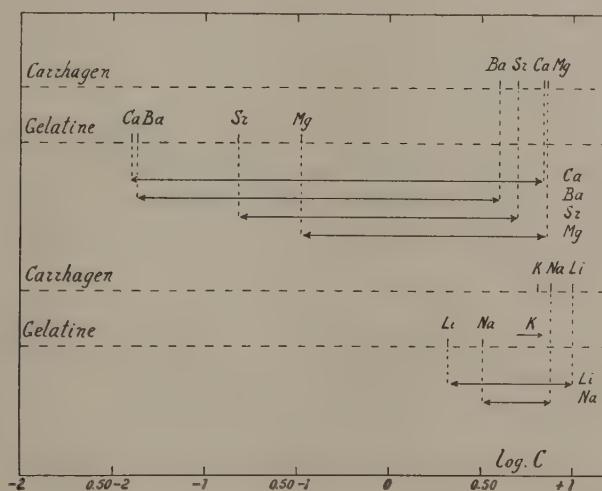


Fig. 3.

These lengths (difference of the logarithms of the reversal of charge concentrations) are given in the last column of Table 1. In this Table we have purposely arranged the salts

¹⁾ As regards their polarizability the COO' group of the proteins is apparently between that of the carbon hydrate colloids with carboxyl group (pectate, arabinate etc.) and those of the soaps, which is seen from a comparison of the ion spectra. These spectra have been discussed in H. G. BUNGENBERG DE JONG and P. H. TEUNISSEN, *Koll. Beihefte*, **48**, 33 (1938).

²⁾ H. G. BUNGENBERG DE JONG, *Proc. Ned. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, **41**, 788 (1938).

below each other in such a way as agrees with the sequence following from Fig. 1 and 2 for the decreasing tendency to flocculation. It is then to be expected that the logarithmic distances ($\Delta \log C$) will decrease from top to bottom in the Table, which is indeed the case.

Finally we mention the fact that the experiments discussed thus far were made with $\text{pH} = 5.5$, that is a little higher only than the I.E.P. of the gelatine used (ca. 5.1). With this pH the gelatine behaves still very markedly as an amphotion. But we have been able to state that even until ca. $\text{pH} = 10$ the amphotion character is noticeable. With $\text{pH} = 8$ we have still made turbidity measurements analogous to those of Fig. 1, with which we still found considerable flocculation with the earth alkali-chloride and with it likewise the order $\text{Ca} > \text{Ba} > \text{Sr} > \text{Mg}$.

The same order ($\text{Ca} > \text{Ba} > \text{Sr} > \text{Mg}$) proved to be present with $\text{pH} = 9.7$, although there the flocculation was already fairly weak. With this pH we still found very weak flocculation with Li , but it was absent with Na .

All this is of biological importance, as from it is seen that it is possible that acid proteins (which are of so frequent occurrence in the organism) with pH values of 6—8 can sufficiently react as amphotions to make it possible for tricomplex systems to occur with natural medium conditions.

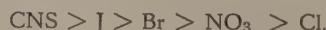
We finish here with a few remarks:

a. We must assume that the carraghene colloid anion attaches itself to positive ionized groups of the protein (for which the arginine and lysine groups for instance come into consideration). Although in diluted sols without the addition of salts there is nothing striking in this respect, this is different when the 3 % gelatine sol and the 0.1 % carraghene sol mentioned are mixed undiluted. It can then clearly be seen macroscopically that the viscosity of the sol mixture increases considerably.

b. The tricomplex flocculation has the characteristics of the complex systems, that neutral salts in general have a neutralizing effect. This is already seen from the curves of Fig. 1 and 2, where the same salts which in smaller concentrations cause tricomplex flocculation, neutralize it in greater concentrations. But we also find this when a second salt is added. The tricomplex flocculation with CaCl_2 disappears, for instance, when some solid KCl is added. With mixing proportions of gelatine + carraghene with which LiCl and NaCl themselves cause practically no tricomplex flocculation (the conditions of Fig. 1) the same may be said of these salts.

We have measured a few more series with the extinctionmeter, with which with constant Ca concentration the concentration of another salt increases. We then found again specific differences between the monovalent cations themselves and the monovalent anions, namely on comparison of the chlorides the neutralization is more difficult (i.e. with higher concentrations) from left to right with: $\text{K} > \text{Na} > \text{Li}$.

Likewise on comparison of a number of K salts the neutralization is more difficult from left to right with



This anion sequence is the same as O. BANK and E. G. HOSKAM¹⁾ found for the neutralization of complex systems with positive proteins. It is namely the sequence of affinity decreasing from left to right of the positive ionized groups of a protein²⁾.

From the order $\text{K} > \text{Na} > \text{Li}$, which is the one of decreasing affinity of carraghene we think we may conclude that on neutralization of the tricomplex system — as far as the cation action is concerned, the screening of the carraghene colloid anion is the determining factor in the final result. (Compare § 4 of Communication II).

¹⁾ O. BANK and E. G. HOSKAM, *Protoplasma* **34**, 188 (1940).

²⁾ L. TEUNISSEN VAN ZIJP, *Diss.* Leiden 1939.

Summary.

1. In mixtures of gelatine and carraghene sols flocculations are formed in the pH section between the I.E.P. of the gelatine and pH ca. 10 with a number of inorganic salts, which do not occur in the presence of only gelatine or only carraghene.
2. The tendency to flocculation of the sol mixture decreases in the following series from left to right: $\text{Ca} > \text{Ba} > \text{Sr} > \text{Mg} > \text{Li} > \text{Na} > \text{K}$.
3. Electrophoretic measurements show that the same order is obtained for the difference decreasing from left to right — of the logarithms of the reversal of charge concentrations of the two colloids.
4. The results obtained in 2 and 3 are agreement with the theory that this flocculation is "tricomplex", so that as real components of the flocculation we may consider: the gelatine amphoion, the carraghene colloid anion and the crystalloid cation used for the flocculation.
5. In a pH section considerably above its I.E.P. the gelatine has still sufficiently the character of an amphoion to make tricomplex flocculation possible.
6. The neutralizing effect of neutral salts, expressed a.o. in an „antagonism” $\text{Ca}-\text{K}$ and $\text{Ca}-\text{Na}$ is discussed briefly.

Leiden, Laboratory for Medical Chemistry.

Biochimie. — *Exposé d'une méthode chronométrique pour le dosage de la peroxydase.*
Par H. G. DERX. Laboratoires de Unilever, Rotterdam. (Communicated by Prof.
L. G. M. BAAS BECKING.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

§ 1. *Introduction.*

C'est LINNOISSIER (12) qui, en 1898, donna le nom de peroxydase „aux corps dont la fonction est de décomposer le peroxyde d'hydrogène ou d'autres peroxydes analogues et de provoquer ainsi des oxydations". Les travaux de SCHOENBEIN (16) dans la seconde moitié du 19ième siècle avaient démontré que plusieurs substances animales et végétales sont capables, comme quelques oxydants inorganiques, de colorer en bleu la teinture de résine de gaïac. Des recherches ultérieures prouvérent qu'il y avait lieu de distinguer les oxydases, qui donnent la réaction de SCHOENBEIN directement et les peroxydases qui ne la donnent qu'en présence d'un peroxyde.

Il paraît, en effet, que plusieurs tissus animaux comme les poumons et la rate possèdent une activité peroxydasique incontestable et qu'il en est de même de quelques sécrétions et de quelques excréptions, tel que la salive (SCHOENBEIN 1848), le lait, les leucocytes, le pus (LINNOISSIER).

Mais c'est dans le règne végétal que la présence des peroxydases devient si commune que l'on pourrait parler d'ubiquité. Cet enzyme a été trouvé dans toutes les plantes supérieures; certaines racines pivotantes et tuméfiées surtout montrent une activité peroxydasique remarquable. Telle par exemple la racine charnue du *Cochlearia Armoracia* L., le raifort, devenu le point de départ des préparations de peroxydase depuis les recherches de BACH et CHODAT (1) en 1903. Du reste, la peroxydase n'est nullement limitée aux racines; la plupart des tissus végétaux en contiennent des quantités variables.

Le réactif de SCHOENBEIN, la teinture de résine de gaïac, n'est pas resté le seul à déceler cet enzyme, quoiqu'on y recourt encore presqu'instinctivement de nos jours. Dès la fin du 19ième siècle toute une série de substances a été proposée l'une après l'autre qui se colorent par les oxydases et qui, en présence de peroxyde d'hydrogène, peuvent servir à mettre en évidence les peroxydases. Mentionnons la dimethyl- et la tétramethyl-para-phenylénediamine produisant les rouges de WURSTER (1887—1888), le mélange équimoléculaire de naphtol- α et de para-phenylénediamine, produisant un colorant indophénolique (RÖHMANN et SPITZER 1895), le gaïacol (BOURQUELOT 1896), la benzidine (ADLER 1904), le pyrogallol (BACH et CHODAT 1903), la leucobase du vert de malachite (VON CZYHLARZ et VON FÜRTH 1907) et j'en passe, pour ne nommer enfin, que la leucobase du 2,6-dichlorophénol-indophénol préconisée par DIEMAIR et HÄUSSER (6) en 1941.

Le dosage de l'activité peroxydasique a naturellement préoccupé tout d'abord les savants qui ont voulu concentrer et purifier l'enzyme en vue de l'isolement de la peroxydase pure. Ce dosage devait leur permettre de juger de l'efficacité des manipulations auxquelles ils soumettaient les préparations brutes de l'enzyme.

Mais outre aux fins de l'enzymologie pure, la connaissance de l'activité peroxydasique des tissus végétaux devient également nécessaire dans certains domaines de la biochimie appliquée. Il a été reconnu que la fermentation du thé est étroitement liée à la présence de peroxydases; que celles-ci jouent un rôle dans l'industrie vinicole; dans la fermentation du tabac; on a trouvé qu'elles peuvent induire une détérioration des huiles végétales, etc.

Dans les laboratoires des établissements industriels transatlantiques de conservation de fruits et de légumes par congélation on a reconnu l'importance de l'absence de la peroxydase quand il s'agit de préserver intacte le goût normal, naturel, du produit frigorifié. Dans ce dernier cas il s'agit donc du dosage d'une activité résiduaire de la peroxydase,

dont la destruction n'a pas été complète; il nous faut par conséquent une méthode d'une très grande sensibilité.

§ 2. *Les méthodes de dosage connues.*

De nombreuses méthodes ont été inventées ayant pour but de déterminer l'activité de la peroxydase. Pour qu'il soit utile, ou même seulement désirable, d'ajouter à ce nombre considérable de méthodes connues une méthode nouvelle, il faut que celle-ci prévaut sur les autres soit par son exactitude, soit par sa nature non équivoque, soit par sa sensibilité, soit, enfin, par sa simplicité. Nous espérons pouvoir démontrer que ces qualités se trouvent réunies dans la méthode qui sera exposée dans ce mémoire.

Passons en revue les méthodes les plus intéressantes pour le dosage de la peroxydase.

La plus ancienne est une méthode gravimétrique: on détermine le poids de purpurogalline formée par l'oxydation du pyrogallol (STRUVE 1872, BACH et CHODAT 1903).

Cependant, la plupart des méthodes sont colorimétriques. On détermine l'intensité de la coloration produite dans un temps fixé par colorimétrie subjective ou objective. Voici les méthodes les plus en usage par ordre chronologique:

1. Réactif: pyrogallol; mesure colorimétrique — en solution étherée — de la purpurogalline formée dans des conditions choisies et fixées de concentration des produits réactants et de température. WILLSTÄTTER et STOLL (25) 1918. C'est la méthode courante. L'activité est exprimé en P.Z. (Purpurogallinzahl).

2. Réactif: gaïacol; mesure colorimétrique — en solution aqueuse — du tétra-gaïacoquinone (soluble). C'est la méthode de BACH et ZUBKOWA (2) 1921 élaborée par BANSI et UCKO (4) en 1926.

3. Réactif: leucobase du vert de malachite; mesure colorimétrique subjective du vert de malachite formé. WILLSTÄTTER et WEBER (26) 1926, ou objective à l'aide du Stufenphotometer ou à l'aide d'un comparateur photoélectrique. BOSSON (5) 1936—37.

4. Réactif: mélange équimoléculaire de naphthol- α et de para-phénolénediamine, le réactif Na-di. Mesure colorimétrique subjective par comparaison avec une solution étalon du colorant indophénolique formé. GUTHRIE (7) 1931. Cette méthode a été employée par ROBERTS et SARMA (14; 15) dans leurs recherches sur l'activité des peroxydases pendant la fermentation du thé.

5. Réactif: benzidine; mesure de la „purpurobenzidine”, colorant rouge, formée, après séparation de celui-ci et dissolution dans l'alcool. ZIRM, REUTER et WILLSTAEDT (21) 1932.

6. Réactif: leucobase du 2,6-dichlorophénol-indophénol (obtenu par la réduction du colorant avec l'acide ascorbique). Mesure du colorant régénéré par la peroxydase dans le Stufenphotometer. DIEMAIR et HÄUSSER (6) 1941.

Ces méthodes colorimétriques présentent les inconvénients bien connus qui leurs sont propres: La colorimétrie simple a l'inconvénient d'être subjective, les méthodes photométriques et photoélectriques exigent un appareil fort coûteux.

Nous devons mentionner encore quelques méthodes volumétriques. Tout d'abord celle de WOLFF et STOECKLIN (20) 1911 qui est basée sur l'action accélérante de la peroxydase dans la réaction entre le peroxyde d'hydrogène et l'acide iodhydrique. Elle a été employée également par KUHN et BRANN (11) 1926. Cette méthode présente l'inconvénient que la réaction entre le peroxyde d'hydrogène et l'acide iodhydrique se produit déjà sans aucun catalyseur. Nous aurons l'occasion d'y revenir dans la suite. La vitesse de la réaction est, comme on le sait, très grande au ph < 2, mais elle est encore parfaitement mesurable aux ph de 4 et de 5, où l'activité de la peroxydase est la plus grande. Ce qui est gênant. Une autre objection grave est celle de l'influence que peut avoir sur la peroxydase l'iode libéré. On peut l'éviter plus ou moins en éliminant l'iode au fur et à mesure qu'il se forme, mais on ne peut le faire qu'en introduisant dans le milieu des substances étrangères, dont on ignore l'action sur l'enzyme. Or, M. JAYLE (9) a démontré que l'hyposulfite de soude a une action paralysante sur la peroxydase. Nous pouvons le confirmer mais nous

avons pu établir en même temps que le tétrathionate de soude, qui apparaît pendant la titration de l'iode à l'hyposulfite, est un accélérateur puissant de la peroxydase. Ce qui est au moins bien inattendu et rend parfaitement illusoire l'étude de la cinétique de la réaction par ce procédé.

BALLS et HALE (3) ont évité les inconvénients de la colorimétrie en déterminant (par titration ultérieure), au lieu de la purpurogalline formée dans la réaction au pyrogallol, la quantité de peroxyde d'hydrogène qui disparaît pendant la réaction. Cette méthode a été employée notamment par JOSLYN, BEDFORD et MARSH (10) dans leurs recherches sur l'activité peroxydasique résiduaire de quelques légumes congelés.

Il ne nous reste qu'à citer la méthode proposée récemment par M. JAYLE et dont nous nous sommes servis pendant quelque temps dans nos expériences sur la peroxydase. C'est une méthode qu'on pourrait appeler chronométrique, mais dans un certain sens seulement, puisque, comme nous le verrons, la durée de la réaction ne sert qu'à modifier les quantités de réactants à employer dans l'expérience suivante et n'entre pas dans la formule servant à calculer l'activité de la peroxydase. L'auteur même l'appelle une méthode de dosage indirecte de l'iode libéré par un système Peroxyde-Peroxydase-Acide iodhydrique. Pour des raisons qui seront discutées par la suite, cette méthode, quoique simple et ingénieuse, n'a pas été en mesure de donner des résultats non équivoques dans les cas d'activités peroxydasiques faibles. Néanmoins, c'est à cause de ses qualités comme de ses défauts qu'elle a mené à la découverte de la méthode chronométrique qui fait le sujet de ce mémoire.

La méthode de M. JAYLE est également basée sur l'*accélération*, par la peroxydase, de la réaction entre l'acide iodhydrique et le peroxyde d'hydrogène. Nous insistons sur ce mot „accélération”, puisque le fait, que cette réaction se produit aussi, et avec une vitesse mesurable, sans aucun catalyseur, rend la méthode peu satisfaisante dans le cas de peroxydases affaiblies.

Le principe de la méthode est le suivant: Dans un mélange de peroxydase, d'iodure de potassium et d'acide ascorbique on introduit un mélange de peroxyde d'hydrogène, d'empois d'amidon et de citrate monosodique (ph 3.7). Le tout à une température de 25° C. A l'instant de l'introduction un chronomètre est mis en marche. L'iode libéré par la réaction est réduit immédiatement par l'acide ascorbique et ce n'est qu'au moment où celui-ci est complètement oxydé, qu'apparaît la couleur bleue de l'amidon iodé. A ce moment le chronomètre est arrêté. On répète l'expérience quelques fois en variant la quantité d'acide ascorbique, afin d'obtenir un temps d'apparition de la coloration bleue compris entre deux et trois minutes et un autre entre trois et quatre minutes. On évalue graphiquement la quantité d'iode libéré par le système au bout de trois minutes.

M. JAYLE a essayé, au lieu de l'acide ascorbique, d'autres „réducteurs” comme le glutathion, la cystéine, l'hyposulfite de soude. Avec les deux premières substances la vitesse de réaction reste la même qu'avec l'acide ascorbique. Avec l'hyposulfite de soude la vitesse diminue rapidement pour s'annuler au bout de 2 à 3 minutes.

Nous avons déjà dit, que, à cause de la vitesse appréciable de la réaction acide iodhydrique-peroxyde d'hydrogène non-catalysée, les résultats dans le cas de peroxydases faibles deviennent douteux. En outre il est souvent impraticable d'arriver, dans ces cas, à une durée de réaction de 3 minutes sans augmenter démesurément la quantité de peroxydase ou sans diminuer trop la quantité d'acide ascorbique.

Mais il y a une autre complication qui devient gênante dans le cas de peroxydases faibles: On sait que la coloration bleue de la combinaison iodé-amidon n'apparaît que quand la quantité d'iode présente dans la solution dépasse une certaine concentration. Celle-ci est de l'ordre de 64 y par 100 cc de liquide (REITH (13)), ce qui équivaut à 0,015 cc d'iode N/100. Or, si l'on fait l'expérience d'introduire 1,0 cc de H_2O_2 N/10 dans un mélange de 3 cc de KJ N/10, 3 cc d'empois d'amidon et 23 cc de solution de citrate monosodique, sans ajouter d'acide ascorbique, on ne voit apparaître la coloration bleue qu'après 10 secondes!! Si on répète l'expérience avec 0,5 cc de H_2O_2 N/10, 25 secondes passent avant l'apparition d'une coloration bleue! (Il va sans dire que ces expériences

ont été exécutées à une température constante (de 25° C.) et à volume constant (30 cc).

Cette expérience illustre les deux inconvénients à la fois: Elle prouve que la réaction s'effectue sans catalyseur; que sa vitesse est mesurable ($K = 0,76 \times 10^{-2}$) et qu'il faut qu'une certaine quantité d'iode soit libérée avant qu'apparaît la coloration bleue.

Ces considérations nous ont obligé d'abandonner la réaction peroxyde d'hydrogène-acide iodhydrique et de chercher une méthode plus appropriée au dosage de quantités minimes de peroxydase.

§ 3. *Principes de la nouvelle méthode.*

Commençons par rappeler une observation de SZENT-GYÖRGYI (17) datant de 1928. En étudiant les réactions des plantes à peroxydase, ce savant avait remarqué qu'en opérant avec des solutions brutes de peroxydase, la coloration de la résine de gaïac et celle de la benzidine ne se produisait qu'avec un retard de quelques secondes, tandis que la coloration apparaissait immédiatement avec des préparations purifiées de peroxydase.

Cette observation a conduit SZENT-GYÖRGYI à une découverte de la plus haute importance: La substance qui „retarda” l'apparition de la coloration bleue n'était autre que l'acide nommé d'abord hexuronique, c. à. d. le futur acide ascorbique, ou Vitamine C. SZENT-GYÖRGYI a montré aussi que l'oxydation spontanée et lente de l'acide ascorbique en solution n'est pas accélérée par le peroxyde d'hydrogène, même en présence de peroxydase. Le retard dans la coloration n'était donc pas dû au fait que la combinaison peroxydase- H_2O_2 s'attaque à l'acide ascorbique avant d'oxyder la benzidine. L'acide ascorbique devient par contre très vulnérable si, à côté de la combinaison peroxydase- H_2O_2 , le milieu contient des corps appartenant aux colorants phényl-benzo- γ -pyroniques (dérivés flaïnoniques etc.).

Quelquesunes de ces substances accélèrent l'oxydation de l'acide ascorbique au plus haut point. Des expériences ultérieures de ST. HUSZAK (8) ont non seulement confirmé ces observations, mais cet auteur a pu démontrer une action analogue de quelques autres substances organiques comme le pyrocatechol, le pyrogallol, l'hydroquinone, la para-phénylénediamine. (Nous avons rangé ces substances selon la progression croissante de leur activité catalytique.) Cependant la para-phénylénediamine est encore dix fois moins active que la quercétine par exemple. L'activité de ce flavonol n'est égalée que par la benzidine.

Parmi les substances nommées se trouvent plusieurs réactifs qui servent à déceler les oxydases, ou en présence de peroxyde d'hydrogène, les peroxydases. La benzidine est un réactif de choix.

Combinons ces données: Si l'on introduit dans un mélange d'acide ascorbique et de peroxydase quelques gouttes de H_2O_2 dilué, rien ne se produira, puisque ce mélange est relativement stable.

Si l'on ajoute à ce mélange quelques gouttes d'une solution alcoolique de benzidine, une coloration bleue se produira, mais avec un retard de quelques secondes — ou de quelques minutes si la quantité d'acide ascorbique a été grande. En effet, la benzidine joue dans ce mélange un double rôle. Sous son influence l'oxydation de l'acide ascorbique s'effectue avec une très grande rapidité (rôle de flavonol) et au moment où l'acide ascorbique a été complètement oxydé la coloration bleue apparaît (rôle de réactif de peroxydase) si du moins il y a du peroxyde d'hydrogène en excès. Dans ce cas la coloration bleue apparaît avec la promptitude d'une explosion!

Disons tout de suite que l'ortho-tolidine, homologue de la benzidine, se comporte comme cette dernière, et que l'ortho-tolidine possède en plus certains avantages qui la font préférable à la benzidine. Elle favorise encore plus l'oxydation de l'acide ascorbique, la couleur bleue apparaît donc encore plus tôt et par conséquent plus soudainement. En outre la couleur bleue est plus stable.

Afin d'éviter la possibilité de confusions, il nous paraît utile d'interposer, à ce que nous venons de dire, une rectification. Nous avons vu que certaines substances peuvent amener l'oxydation de l'acide ascorbique, mais ces substances le font, si j'ose dire, malgré elles.

Ce sont les substances mêmes qui sont oxydées par le complexe peroxydase- H_2O_2 avec une vitesse nettement définie et souvent très grande; mais leurs produits primaires d'oxydation: les quinones correspondantes dans le cas des dérivés flavoniques et les semiquinones bleues dans le cas de la benzidine et de l'*o*-tolidine, sont réduites, c. à. d. décolorées, de nouveau par l'acide ascorbique avec une vitesse pratiquement infiniment grande. Le temps qui s'écoule entre l'introduction de la benzidine ou de l'*o*-tolidine et l'apparition de la coloration bleue dépend donc *uniquement* de la vitesse avec laquelle ces corps mêmes sont oxydés par le complexe peroxydase- H_2O_2 . L'acide ascorbique n'est qu'un donneur d'hydrogène, ou, si l'on veut, une source d'électrons qui sont transférés aux semiquinones de la benzidine ou de l'*o*-tolidine.

Il est facile de se rendre compte de cet état de choses par une expérience simple, qui consiste d'une part à déterminer le temps qui s'écoule avant l'apparition d'une couleur bleue quand on introduit de l'*o*-tolidine dans une solution, tamponnée à ph 5, contenant de la peroxydase, du H_2O_2 et une quantité définie d'acide ascorbique et d'autre part à répéter cette expérience mais de n'ajouter l'acide ascorbique qu'après que la réaction ait procédé pendant un même laps de temps qu'a duré la première expérience. On verra que la solution bleu-foncé se décolore aussitôt; le transfert de l'hydrogène de l'acide ascorbique à la semiquinone s'effectue donc instantanément.

L'acide ascorbique n'agissant donc que comme réducteur peut être remplacé par n'importe quel autre réducteur convenable, c. à. d. possédant un potentiel d'oxydo-réduction assez bas et — ce qui est plus difficile à réaliser — n'ayant pas d'action nuisible sur la peroxydase. La durée de la réaction ne changera pas. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point.

§ 4. *Description de la méthode de dosage.*

Il sera clair de ce qui précède, qu'une méthode simple de dosage de l'activité peroxydaseique peut être élaborée, ayant comme base les phénomènes exposés.

Si l'on tient constants le volume total du milieu, la température, la quantité d'*o*-tolidine et de peroxyde d'hydrogène et que l'on choisit la quantité d'acide ascorbique telle, qu'elle n'emploie que 5 % du peroxyde présent pour son oxydation, la durée de la réaction est une fonction directe de la quantité de peroxydase ou plutôt de son activité.

Il va sans dire que cette activité est également une fonction du ph du milieu de réaction. Nous avons établi, que l'activité la plus grande se montre à un ph 5 pour la plupart des extraits végétaux. Les expériences seront donc conduites dans une solution de citrate de soude ayant ce ph.

Solutions nécessaires.

1. *Solution de citrate de soude de ph 5.*

On prépare une solution contenant par litre: 10,5 gr d'acide citrique monohydraté et 95,3 cc de NaOH 1 N.

2. *Solution d'acide ascorbique N/100.*

88 milligrammes d'acide ascorbique sont dissous dans 100 cc de la solution de citrate de ph 5. Le titre de la solution est vérifié par rapport à une solution d'iode N/100.

3. *Solution de peroxyde d'hydrogène N/10.*

On dose la solution de peroxyde dont on va se servir et on la dilue à N/10 avec la solution de citrate de ph 5.

4. *Solution d'ortho-tolidine à 0,5 %.*

On prépare une solution de 1 % de cette substance dans de l'alcool à 96 %; on y ajoute ensuite un volume égal d'eau distillée.

Préparation de l'extrait du tissu végétal.

20 grammes du tissu sont triturés avec environ 10 grammes de sable fin purifié, et 20 cc d'alcool à 96 %. Après que le tissu est tout à fait désintgré et que la masse paraît

homogène, on ajoute de l'alcool jusqu'à un volume total d'environ 100 cc. La suspension est essorée à la trompe. Le résidu contenant la peroxydase précipitée est lavé deux fois avec 50 cc d'alcool à 96 %. Dans le cas de tissus riches en chlorophylle ou en d'autres colorants on continue le lavage jusqu'à ce que l'alcool de lavage s'écoule pratiquement incolore.

On introduit le résidu dans de la solution de citrate, on transvase dans un ballon calibré et on porte le volume à 100 cc. On laisse reposer la suspension pendant une heure en la remuant de temps en temps, et on la filtre. Pour les tissus normaux on peut admettre que 100 cc d'extrait correspondent à 20 grammes de tissu.

Le traitement à l'alcool sert à éliminer toute trace de corps phénoliques ainsi que les réducteurs qui pourraient se trouver dans le tissu (acide ascorbique).

Afin d'éviter des dosages quantitatives avec des extraits qui ne contiennent pas — ou plus — de peroxydase active, on fait un essai qualitatif de la façon suivante:

Dans une éprouvette contenant 5 cc d'extrait on introduit 0,5 cc de la solution d'o-tolidine et 0,5 cc de H_2O_2 N/10. Si après 5 minutes aucune couleur bleue ne s'est développée, la réaction est considérée comme négative. Si la couleur qui se développe dans 5 minutes n'est que bleu faible, nous la désignons comme pratiquement négative. Seulement dans le cas qu'une coloration bleue se montre aussitôt ou qu'elle devient intense au courant de 5 minutes, on procède à une détermination quantitative.

L'exécution du dosage.

Un grand tube à essai robuste, ayant un contenu d'environ 60 cc (longueur \pm 20 cm, diamètre \pm 2 cm) est fixé dans un bain d'eau transparent (verre de 2 litres) pourvu d'un agitateur automatique, et dont la température est maintenue à 25° C. exactement. On introduit dans ce tube (tube I) 5 cc de l'extrait contenant la peroxydase et 0,5 cc d'acide ascorbique N/100. On munit le tube d'une baguette de verre à fond aplati.

Dans un second tube de mêmes dimensions (tube II) on introduit 22,5 cc de solution de citrate de ph 5, 1 cc de solution de H_2O_2 N/10 et 1 cc de solution d'o-tolidine à 0,5 %. Le contenu de ce tube est porté à une température de 25° C. (à l'aide d'eau tiède p. ex.).

On verse le contenu du tube II dans le tube I, en mettant simultanément en marche un chronomètre. A l'aide de la baguette les liquides sont bien mélangés et agités de temps en temps. Au moment qu'une coloration bleue apparaît dans tout le liquide on arrête le chronomètre, et on note le temps écoulé t (secondes).

Si la réactio a duré plus de 30 secondes et moins de 5 minutes, on peut procéder au calcul de l'activité de la peroxydase comme il sera indiqué plus loin.

Si la durée était moins de 30 secondes, il est préférable de répéter l'expérience avec moins d'extrait (et plus de solution de citrate pour que le volume total du milieu de réaction soit maintenue à 30 cc).

Inversement, si la réaction dure plus de 5 minutes, on n'attend pas l'apparition de la couleur bleue, mais on répète l'expérience avec 10 ou même 20 cc de l'extrait et relativement moins de solution de citrate dans le tube II. Toutes les expériences sont faites dans une volume total de 30 cc.

Dans le cas d'activités extrêmement faibles il peut arriver que même avec 20 cc d'extrait la couleur n'apparaît pas dans 5 minutes. On continue l'expérience pendant 10 autres minutes, mais elle est arrêtée après 15 minutes. Si l'extrait s'était montré positif à l'essai qualitatif, mais que la couleur bleue dans la réaction quantitative avec 20 cc d'extrait n'apparaît pas dans 15 minutes, l'activité de la peroxydase est minime (nous la désignons comme faiblement positive). Calculée, elle ne se monte dans ce cas qu'à moins de 0,04 Unités Normales de Peroxydase par Kilogramme.

Calcul de l'activité.

Nous définissons comme Unité Normale de Peroxydase (U.N.P.) la quantité de peroxydase qui, dans les conditions de l'expérience, réduit 1 millimol. de H_2O_2 par minute.

(Le nom U.N.P. a été choisi pour éviter une confusion avec les Unités de WILLSTÄTTER, déterminées par la méthode à la purpurogalline, ainsi que d'autres Unités en usage.

1 millimol. de H_2O_2 correspond à 200 cc de H_2O_2 N/100.

Si a mgr. de tissu cause l'oxydation de 0,5 cc d'acide ascorbique N/100 en t secondes, la quantité de H_2O_2 réduite par minute se chiffre par $\frac{60}{t} \times 0,5$ cc de H_2O_2 N/100.

Afin de réduire 200 cc de H_2O_2 N/100 en une minute il faut $\frac{200}{\frac{60}{t} \times 0,5}$ a mgr soit

$\frac{40}{6}$ a.t. mgr. de tissu.

Cette quantité de tissu contient, selon notre définition, 1 U.N.P.

Un gramme de tissu contient donc $\frac{1000}{\frac{40}{6} \text{ at}} = \frac{150}{\text{at}}$ U.N.P.

Pour donner une idée des activités trouvées ainsi dans quelques végétaux, nous joignons à cet endroit un aperçu de quelques déterminations.

U.N.P./gr.

Raifort (<i>Cochlearia Armoracia</i> L.)	0,68 (frais)—2,63 (desséché)
Radis noir (<i>Raphanus sativus</i> L. var. <i>niger</i> Pers.)	0,15
Navet blanc	0,10
Choufleur	0,21 —0,31
Choux de Bruxelles	0,37 —0,78
Carottes	0,0009—0,0034
Endives	0,0015—0,0025

BIBLIOGRAPHIE.

1. A. BACH et R. CHODAT, Untersuchungen über die Rolle der Peroxyde in der Chemie der lebenden Zelle. IV. Ueber Peroxydase. Ber. **36**, 600 (1903).
2. A. BACH et ZUBKOWA, Biochem. Z. **125**, 283 (1921).
3. A. K. BALLS et W. S. HALE; J. Assoc. official Agr. Chem. **16**, 445—453 (1933).
4. H. W. BANSI et H. UCKO, Ueber Peroxydase. 1. Allgemeines und Untersuchungsmethodik. Z. physiol. Chem. **157**, 192 (1926); **159**, 235 (1926); **164**, 52 (1927); **169**, 178 (1927); Klin. Wochenschr. 927 (1924); 309 (1927).
5. G. BOSSON, Contributions à l'étude des Peroxydases. II, Arch. intern. de physiologie, **44**, 212—215 (1936—37); III ibid., **44**, 219—229; IV ibid., **44**, 230—231; V ibid., **44**, 436—443.
6. W. DIEMAIR et H. HÄUSSER, Zur Kenntnis der Peroxydases. 1. Ein neues colorimetrisches Bestimmungsverfahren mit 2,6-Dichlorphenol-Indophenol und L-Ascorbinsäure im PULFRICH-Photometer. Z. anal. Chem. **122**, 12—24; 173—182 (1941).
7. J. D. GUTHRIE, A method for the determination of peroxidase activity. J. Am. Chem. Soc., **53**, 242—244 (1931).
8. ST. HUSZÁK, Ueber die Funktion des Peroxydase-Systems der Pflanzen. Z. physiol. Chem. **247**, 239—247 (1937).
9. M. F. JAYLE, Etude comparative de l'action catalytique des peroxydases végétales et de l'hémoglobine. Bull. de la Soc. de chimie biologique, **21**, 14—47 (1939).
10. M. A. JOSLYN, L. L. BEDFORD and G. L. MARSH, Enzyme activity in frozen vegetables. J. Ind. Eng. Chem., **30**, 1068—1073 (1938). Ibid., **31**, 751—758 (1939).
11. R. KUHN et L. BRANN, Ber. **59**, 2370 (1926).

12. G. LINOISSIER, Contribution à l'étude des fermentes oxydants. Sur la peroxydase du pus. *C. R. Soc. de Biologie*, **5**, 373 (1898).
13. REITH, De micro-jodiumbepaling in natuurlijke grondstoffen. *Diss. Utrecht*, 37 (1929).
14. E. A. H. ROBERTS and S. N. SARMA, The fermentation process in tea manufacture. I. The role of peroxydase. *Biochem. J.* **32**, 1819—1828 (1938).
15. E. A. H. ROBERTS, The fermentation process in tea manufacture. II. Some properties of tea peroxidase. III. The mechanism of fermentation. *Biochem. J.* **33**, 836—852 (1939).
16. C. SCHOENBEIN, *Poggendorf's Ann.*, **75**, 357 (1848). *Verh. Naturforsch. Ges. Basel*, I, 339 etc. (1855).
17. A. V. SZENT-GYÖRGYI, Observations on the function of peroxidase systems and the chemistry of the adrenal cortex. *Biochem. J.* **22**, 1387 (1928).
18. R. WILLSTÄTTER et A. STOLL, Ueber Peroxydase. *Ann.* **416**, 21 (1918).
19. R. WILLSTÄTTER et H. WEBER, Zur quantitativen Bestimmung der Peroxydase. *Ann.* **449**, 156 (1926).
20. J. WOLFF et E. DE STOECKLIN, *Ann. Inst. Pasteur*, **25**, 313 (1911).
21. K. L. ZIRM, F. REUTER et H. WILLSTAEDT, Zur Kenntnis der peroxydatischen Wirkung. I. Eine quantitative Bestimmung der peroxydatischen Wirkung mittels Benzidin. *Biochem. Z.* **245**, 290—298 (1932).

Botany. — The Importance of the Growth Medium for the Absorption of Cations by Plants (A Working Hypothesis). By A. C. SCHUFFELEN and R. LOOSJES. (Communicated by Prof. A. H. BLAAUW.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

1. The absorption of cations by plants is a problem of study both for plant physiologists and agricultural chemists. The former consider more particularly the vital functions of the plant and their influence on the accumulation of cations, while the latter devote special attention to the influence of the growth medium on the absorption of ions and on plant growth. The question may be put whether the medium — the dead substance — exercises influence indeed on the accumulation of ions and, if so, what is the nature of this relation.

Numerous ash analyses of plants of one of the same species, grown in different types of medium, demonstrate that there is actually question of the medium exercising influence on the absorption of cations. Agricultural science makes even use of this for the determination of the nutritive status of the soil (NEUBAUER (1)).

To obtain a more accurate idea of the importance of the medium for the accumulation of ions, one should distinguish the processes which take place between the plant root and the medium. Two process complexes can be distinguished. The first comprises the processes in which the plant takes part only as a colloidal system. The result of the presence of this colloidal system in a certain medium is the course to an equilibrium status between the plant colloid and the medium, in which the vital functions of the plant play no part and only the layers of colloidal substances at the surface of the root play a rôle. The second complex of processes taking part in the absorption of ions is the transport of the ions from the surface into the plant body. The vital functions of the plant have an active share in this physiological event, but it is not within the scope of the present to deal with this further.

The first mentioned part of the absorption of ions is dependent on the plant as well as on the medium, for both the plant and the medium determine the composition in the surface layer. In certain circumstances the composition in the surface layer must be almost constant, rendering it possible to study the *direct influence* of the medium on the accumulation, because the composition of the medium is then decisive for the supply of ions.

If these circumstances are not present there may be a question of *indirect influence* exercised by the medium, when the physiological processes of the plant undergo changes which may also be caused by the medium.

In connection with this analysis of processes that determine the accumulation of ions and for which we distinguish the influence of the medium in two parts, we reason, therefore, as follows:

First of all the absorption of ions is a function of the situation of these ions in the medium in which the plant root lives. Secondly it is a function of other properties of the medium in so far as they have influence on the accumulation of ions (e.g. pH). Thirdly it is a function of the processes conducted by the vital functions of the plant. The latter processes may be changed by the accumulation of the ions concerned. Only the former two functions are determined directly by the medium and the third by the plant. The change in the third function may be due to indirect influence of the medium.

Most studies published on the absorption of ions deal with the process of ion accumulation as a whole, without making distinction between the said processes. The disadvantage of this is that only the resultant of these processes can be considered, without obtaining a correct idea either of the physiological process or of the pure colloidal process. This induced us to endeavour to divide the total process into its parts and to

commence with the study of one particular part, for which we, as agricultural chemists, took obviously the influence of the medium. For dressing of fertilizers modify the situation in the medium and, therefore, this aspect has our special attention. Furthermore we confine ourselves for the present to the direct influence of the medium, as this is least complicated for the study and might divulge the way to separation of the processes. In this connection we shall also deal only with the accumulation of cations.

2. To realise the said investigation into the direct influence of the medium, it is necessary to draw up a working hypothesis which renders interpretation of the data possible. Apart from more or less vague theories of HOAGLAND (2) and STEWARD (3) there exist the more elaborate views on the accumulation of cations by LUNDEGÅRDH (4), BROOKS (5) and others, advancing interchange of H -ions against metal ions. This hypothesis gives a quantitative explanation by means of DONNAN-equilibria.

The assumption of real (thermodynamic) equilibria in plants is, however, certainly incorrect, so that interpretation according to certain equilibrium theories is, strictly speaking, not possible. These can lead only to rough approximation. A stationary situation (a non-equilibrium situation kept up by continuous supply of energy) in plants is physically the most probable one. Taking furthermore into account that in most instances not only H -ions but also metal ions are interchanged against other metal ions, it is clear that study of the absorption of cations by means of interchange phenomena is no easy task.

We would adopt, therefore, another way in which the accumulation of ions is considered as a diffusion process. This has the advantage of coming up to reality — for ions diffuse indeed in the plant — while also from a physicochemical point of view it is a well-known process that can be worked out easily for simple cases.

Diffusion takes place if two media with different concentrations get into contact with each other. The heat movement causes the ions to endeavour to spread evenly over both media, resulting in gross ion transport to the side of the lowest concentration. In fact during accumulation of ions the same species of ions disappears from the plant root, a fact demonstrated by JENNY and OVERSTREET (6) and confirmed in our investigations (7). It is not possible, however, to materialise the process in this simple form, as in general the concentration of ions is higher in the plant than in the medium surrounding the root. We must not work, therefore, with the real concentrations, but with apparent or active concentrations (called activities).

This is due to the fact that ions are charged particles. Charged particles are influenced by an electric field in which they are present, so that a real concentration does not indicate their true position. The thermodynamic formula for the chemical potential¹⁾ of an ion species in solution reads originally as follows: $\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln c_i$, where μ_i is the chemical potential, μ_i^0 a normal potential, R the gas constant, T the absolute temperature and c_i the concentration of the ions i . This must be corrected for electrolyt solutions and becomes:

$$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln c_i + RT \ln f_i$$

or

$$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln c_i \cdot f_i,$$

the added term accounting for the electric forces. We now adopt $f_i \cdot c_i = a_i$ in which f_i represents the activity coefficient and a_i the activity, so that we may describe the correct formula for the chemical potential as

$$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln a_i.$$

¹⁾ The thermodynamic quantity determining the behaviour of an ion species in diffusion.

The fact that it is necessary to indicate the position of an ion species not by its real concentration but by its activity is laid stress upon especially when applying it to colloidal solutions. For real solutions the correction on the concentration amounts in physiological concentrations to a factor of 0.8—1.0 ($f_i = 0.8—1.0$), while in suspensions this factor may fall to 0.01—0.001 and perhaps more. In experiments with solutions the correction may mostly be neglected in view of the variability of the plant material, but in experiments with soils, suspensions and soils certainly not. Various biological experiments also demonstrated this fact, for the behaviour of plants in respect of adsorbed ions is different from that in respect of free ions (ALBRECHT (8), JENNY and COWAN (9), JENNY and OVERSTREET (6), JENNY, OVERSTREET and AYERS (10) and others).

We must not describe, therefore, the diffusion process between plant root and medium by the concentrations but by the activities. As the ions in plant are adsorbed for the greater part by the plant colloids, very low activity coefficients have to be expected also in plants. This could solve to a certain extent the controversy in respect of diffusion to a higher concentration. Applying the diffusion law in its most simple form we may write down:

$$\begin{aligned}\text{intake of cations} &= K \times (a_i)_{\text{medium}} \times \text{surface} \\ \text{outgo of cations} &= K \times (a_i)_{\text{plant}} \times \text{surface}.\end{aligned}$$

The transport of the nutritive ions in the plant is a result of a complicated series of activity differences between the various plant parts, conducted by various potential differences, created by the vital functions. In our consideration, in which we want to deal with the direct influence of the medium, we assume these processes to be constant. Without necessarily becoming mechanical we may imagine these vital functions schematically as a never-failing pump, working automatically. This simplification renders it possible to assume a "surface" between medium and root, on which the influence of the medium is active at one side and the pump begins its working at the other side. It is not possible yet to characterise this surface morphologically. It may be the protoplasm wall of the epidermis (LUNDEGÅRDH (11)), but in our considerations it is not necessary for this fictitious surface to be connected with a certain place in the root. It may also reflect, for instance, the average position of a few cell layers, without necessity of localizing this further.

We now assume that this imaginary surface is in a stationary position, i.e. its properties, composition etc. are not subject to changes during the experiment. Addition of ions from the medium to the surface causes the pump to function spontaneously as a suction pump resulting in immediate reinstatement of the old situation at the surface. Removal of ions from the imaginary surface to the medium causes the pump to operate as a forcing pump which replenishes spontaneously the losses. Only then there is question of a stationary situation, a situation in which removal is equal to addition.

The said two relations following from the diffusion law may, therefore, be more clearly described as:

$$\begin{aligned}\text{intake of cations} &= K \times (a_i)_{\text{medium}} \times \text{surface} \\ \text{outgo of cations} &= K \times (a_i)_{\text{"surface"}} \times \text{surface}.\end{aligned}$$

An analysis of the total plant indicates what has passed through the imaginary surface (intake minus outgo).

We have still to see whether merely the difference in activity of the ion species between surface and medium is decisive for the accumulation. On the said condition of ideal pump function this would have to be so if no complications interfere. The activity of the ions in the medium and that of the ions at the "surface" differs in almost all instances. This difference in activity is accompanied by a potential difference between "surface" and

medium, mainly of a thermodynamic nature but for a smaller part diffusion potential. The two factors exercising considerable influence on this potential difference (PD) are known from the colloid-chemistry.

It is the activity of the "potential-determining" ion with which the PD is connected according the following formula²⁾:

$$PD = E_0 + \frac{RT}{nF} \ln (a_i)_{\text{medium}}.$$

The ion determining the potential of the surface in respect of the medium is the H -ion, as appears from various considerations (the surface layers consist of protoplasm albumen or phosphatide), and as also demonstrated by LUNDEGÅRDH (11).

Apart from the pH of the medium the potential difference between surface and medium is also dependent on the total salt concentration of the medium (Σc_i). In contrast with the relation between PD and pH which is straightly proportional, the relation between Σc_i and PD is very complicated. For the present we can only indicate that increase of the total salt concentration reduces the potential difference.

The diffusion process of ions from medium to plant root is on account of presence of this potential difference not only dependent on the activity difference of ions between the two, but also the fact that the (charged) ions are moving in an electric field plays a rôle. A negative PD of the surface in respect of the medium promotes the intake of cations and checks outgo. A positive potential of the wall in respect of the medium exercises a reverse effect.

We may express the relation between medium factors and the process of accumulation (intake and outgo) of root and medium as follows:

$$\begin{aligned} \text{intake of cations} &= K' \times (a_i)_{\text{medium}} \times f(PD) \\ \text{outgo of cations} &= K' \times (a_i)_{\text{"surface"}} \times f'(PD) \end{aligned}$$

(In K' the surface is comprised).

Now, $f(PD)$ and $f'(PD)$ can be worked out:

$$\begin{aligned} \text{intake of cations} &= C \times (a_i)_{\text{medium}} \times e^{\frac{nF}{RT} \cdot \frac{PD}{2}} \\ \text{outgo of cations} &= C \times (a_i)_{\text{"surface"}} \times e^{\frac{-nF}{RT} \cdot \frac{PD}{2}}, \end{aligned}$$

where $PD = f(pH)_{\text{medium}}, (c_i)_{\text{medium}}$.

Without entering in details about the derivation we can demonstrate that it is right by assuming an equilibrium status. Then, intake is equal to outgo and the well-known formula:

$$PD = \frac{RT}{nF} \ln \frac{(a_i)_{\text{"surface"}}}{(a_i)_{\text{medium}}}$$

results.

As PD is equal to a constant $+\frac{RT}{nF} \times \text{pH}$, the intake of an ion is proportional to the \sqrt{aH} and the outgo reversely proportionate to it.

The working hypothesis drawn up demands confirmation in two ways:

a. Is the characteristic of the medium by means of the activity also from biological point of view a better standard than the description by means of concentration?

b. Is it possible to demonstrate the influence of $(a_i)_{\text{medium}}$, $(\text{pH})_{\text{medium}}$ and $(\Sigma c_i)_{\text{medium}}$ on the accumulation of ions?

²⁾ This formula is valid for the total potential difference, we assume that PD , being a part of it, is also a logarithmic function of a_i .

3. Our working hypothesis suggests the accumulation of a cation species from the medium to be dependent only on the $(a_i)_{\text{medium}}$, the $(\text{pH})_{\text{medium}}$ and the $(\Sigma c_i)_{\text{medium}}$ if the physiological processes are constant.

This implies, therefore, that for a medium with a certain composition pH and Σc_i are constant factors for all ions. Consequently it must be possible to reconstruct the ratio of the activities of the medium in the composition of the plant ashes. If also the physiological processes should be the same for all ions, the concentration ratio in the plant would not have to be precisely the same as the activity ratio in the medium, as the potential difference between surface and medium exercises an influence on univalent ions different from that on bivalent ions. It is also difficult to assume that the same "pump function" applies quantitatively to different ions. Furthermore, in the event of long-continued growth there will be question of regular change in the medium of the plant, in which stationary positions are moved ever more and more to real equilibria.

The concentration ratios in the plant can reflect, therefore, approximate activity ratios only. Table 1 shows that the ratios of the ions in the plant are situated much more closely with the activities of the medium than with those of the concentrations of the medium.

TABLE 1. Selection coefficients.

	I K : Ca	II K : Ca
Concentration ratio medium	1 : 8.4	1 : 5.6
Activity ratio medium	1 : 0.82	1 : 0.72
Concentration ratio plant	1 : 0.49	1 : 0.22
Selection coefficient calculated from conc. ratio medium	17	25
" " " " activity " "	2	3

For this, analyses of ripened oats plants (variety "MANSHOLT III") (grain, chaff and straw) were compared with the concentration and activity ratios of the medium. This medium consisted of a quartz sand-dusarit mixture (an artificial soil), as we use regularly for experiments on the importance of ion ratios in the medium for plant growth.

The concentrations (more correctly: the adsorbed quantities pro g dusarit) of the medium were known and the activities determined according to our previously published working method³⁾ (12).

The supposed strong selection power of the plant, attributed so far to inexplicable life processes, has been reduced to a real value in this simple experiment. Instead of a selection quotient of 17 to 25, on taking into account concentration ratios, activity ratios were found to have selection quotients of 2 to 3 which is much more comprehensible.

4. The influence of the ratios of the concentrations on the accumulation of ions is very complicated. It appears from various investigations that one cannot speak, strictly speaking, of the ratio of two ions being most favourable for plant growth, without also involving the other ions present therein.

According to our working hypothesis, in which not the concentrations but the activities determine the absorption, this can be explained only if the ratio of the ion activities in the medium has a more or less complexed dependence on the concentration ratio of the ions concerned.

To follow this we determined in a number of dusarit mixtures the activity of ions according to the method referred earlier. The calculated activities are shown in table 2. The first series of determinations refer to a number of dusarit mixtures, in which the quantity of adsorbed H-ions was almost constant. The quantity of adsorbed Na-ions was

3) A solution of ammonium nitrate which contained the nitrogen dressing applied in pot cultures was used as dialysis liquid.

also kept at a constant level. The quantities of the three remaining ions (K, Mg and Ca) are changing. The figures of table 2 imply that the activity of the H- and Na-ions is

TABLE 2. Ion activities of dusarit mixtures (suspensions in NH_4NO_3 solution).

No.	Equivalent per cents					ratio in g atoms					Activity $\times 10^4$					
	H	Na	K	Mg	Ca	H	Na	K	Mg	Ca	a_H	a_{Na}	a_K	a_{Mg}	a_{Ca}	pH
1	12.0	4.4	4.2	4.4	75.0	2.7	1	1.0	0.5	8.5	0.06	66	50	21	120	5.23
2	12.6	4.4	4.2	8.8	70.0	2.8	1	1.0	1.0	8.0	0.05	48	40	18	66	5.29
3	13.9	4.4	4.2	17.5	60.0	3.1	1	1.0	2.0	7.4	0.06	55	43	79	76	5.22
4	12.7	4.4	8.5	4.4	70.0	2.9	1	1.9	0.5	8.0	0.05	60	83	22	65	5.28
5	13.3	4.4	8.5	8.8	65.0	3.0	1	1.9	1.0	7.4	0.05	54	78	23	50	5.29
6	14.6	4.4	8.5	17.5	55.0	3.4	1	1.9	2.0	6.2	0.06	56	54	18	30	5.22
7	14.2	4.4	17.0	4.4	60.0	3.2	1	3.9	0.5	6.8	0.05	68	141	2	32	5.28
8	14.8	4.4	17.0	8.8	55.0	3.4	1	3.9	1.0	6.2	0.05	69	145	0.8	37	5.30
9	16.1	4.4	17.0	17.5	45.0	3.6	1	3.9	2.0	5.1	0.06	72	155	5	35	5.19
10	7.7	4.4	8.5	4.4	75.0	1.8	1	1.9	0.5	8.5	0.03	40	65	9	37	5.58
11	12.7	4.4	8.5	4.4	70.0	2.9	1	1.9	0.5	8.0	0.05	52	85	15	69	5.27
12	17.7	4.4	8.5	4.4	65.0	4.0	1	1.9	0.5	7.4	0.12	45	71	8	49	4.93
13	22.7	4.4	8.5	4.4	60.0	5.2	1	1.9	0.5	6.8	0.24	38	58	9	36	4.62
14	27.7	4.4	8.5	4.4	55.0	6.3	1	1.9	0.5	6.2	0.51	36	52	7	30	4.29
15	32.7	4.4	8.5	4.4	50.0	7.4	1	1.9	0.5	5.7	1.02	28	47	5	18	3.99
16	37.7	4.4	8.5	4.4	45.0	8.5	1	1.9	0.5	5.1	2.04	30	50	7	20	3.69
17	42.7	4.4	8.5	4.4	40.0	9.7	1	1.9	0.5	4.5	4.57	28	49	6	24	3.34
18	47.7	4.4	8.5	4.4	30.0	10.8	1	1.9	0.5	3.4	22	19	39	2	9	2.66

almost constant. The activity of K-ions increases as the quantity of the potassium is higher. This increase in activity is, however, not equal to the increase in concentration (quantity). In a four times higher concentration the activity is only 2.8 times higher. The influence of the bivalent ions on the potassium activity is not great, although the middle potassium and the highest magnesium concentration (table 2, No. 6) show a distinct influence which is greater than the experimental error. The increase in adsorbed potassium exercises a very great influence on the activity of the other ions, as appears from table 2.

Especially the 17% potassium concentration has a bearing effect on the activity of magnesium. This amounts even to 10—20 times for one and the same magnesium concentration in respect of the potassium quantity (table 2, No. 2 and 8). Also the activity of the calcium ions declines by increase of the potassium concentration.

In a second series of observations the quantities of metal ions were kept in a constant ratio and only the quantity of H-ions varied. Apart from the optimum in No. 11 (table 2) which is probably real, we notice that increasing concentration of H-ions reduces the activity of metal ions. This applies especially to the last numbers of the series (table 2, No. 17 and 18). The decrease in activity of the univalent ions amounts to about 2 times over the measured stretch and the decrease in activity of the bivalent ions to about 4 times in the same stretch.

Comparison of the two series shows that the influence of the univalent metal ions on the activity of the bivalent ions is greater than that of the H-ion. This is also known from practical fertilizer chemistry ("Hooghalen disease" i.e. magnesium deficiency on acid magnesium deficient soils especially when dressing potassium).

We think to be entitled to conclude on basis of the foregoing that to judge the influence of the medium it is better to work with activities than with concentrations. This does not only be more in agreement to reality, but opens up at the same time new aspects on the influence of the medium on the absorption of ions by plants. This is of great importance

when working with media consisting of sols or suspensions (e.g. soils) of which the activity coefficient is small (adsorbed ions) and the activity differs, therefore, considerable from the concentration.

5. From our working hypothesis we must conclude that the plant gives off very few ions only to a medium consisting of distilled water.

On placing the plant roots in distilled water, we may indicate the following characteristic for the medium:

$$(a_i)_{\text{medium}} \approx 0; (pH)_{\text{medium}} = \text{high} (\pm 7); (c_i)_{\text{medium}} \approx 0.$$

Owing to the high pH and the low salt concentration of the medium the potential difference between surface and the surroundings will be large. This means, therefore, according to the above formulae that the outgo becomes small. Diffusion of a very small quantity of the ions from the root to the medium is adequate to make the intake equal to the outgo, after which no further concentration movements take place.

On placing the roots of oats plants (sound, intact plants) for about 10 hours in distilled water, we found the results shown in table 3.

TABLE 3. Outgo of ions from roots into distilled water.

No.	Determined ion	Blank mg eq/100 g root	Distilled water mg eq/100 g root
1	K	21.0	22.7
2	K	32.0	27.2
3	Na	14.8	14.8
4	Na	18.1	16.1
5	Na	26.5	25.9
6	Na	27.8	28.9
Total		140.2	135.6

In this table the content of the roots is expressed in mg eq per 100 g dry matter. The small decrease we find in totalling the completely comparable objects, lies within the error limit. Although we cannot conclude with certainty that decrease has taken place, because the difference lies within the error limit, we may assume nevertheless that the decrease (i.e. outgo minus intake) was very slight.

In another experiment with plants, the roots of which contained an accumulation of radioactive potassium, it appeared that very small quantities of this element were given off to distilled water. In this instance a determination was made of the loss radioactive K by the root mass (about 2 g dry matter) in four hours into distilled water. This quantity amounted, according to the customary measurement, to 5 (± 5) counts of the GEIGER-apparatus per minute. In this instance the outgo was so small that it remained within the error limit. The experiments on the outgo of ions to distilled water correspond to the results to be expected in accordance with the working hypothesis drawn up.

Further experiments to test the formulae derived are in progress.

Wageningen, Laboratory for Agricultural Chemistry
of the Agricultural College.

Eindhoven.

LITERATURE CITED.

1. NEUBAUER, H. and SCHNEIDER, W., Z. Pflanzenernähr. Düngung Bodenk. A 2, 329 (1923).
2. HOAGLAND, D. R., Ann. Rev. Biochem., 1, 618 (1932).
3. STEWARD, F., Trans. Faraday Soc., 33, 1006 (1937).
- HOAGLAND, D. R. and STEWARD, F., Nature, 143, 1031 (1939), 145, 116 (1940).

4. LUNDEGÅRDH, H., Ann. Agric. College Sweden, **8**, 233 (1940); Nature, **143**, 203 (1939), **145**, 114 (1940).
5. BROOKS, S. C., Trans. Faraday Soc., **33**, 1002 (1937).
6. JENNY, H. and OVERSTREET, R., Soil Sci., **47**, 257 (1939).
7. SCHUFFELEN, A. C. and LOOSJES, R., Landbouwk. Tijdschr., **54**, 22 (1942).
8. ALBRECHT, W. A., Journ. Amer. Soc. Agron., **24**, 793 (1932).
9. JENNY, H. and COWAN, E. W., Z. Pflanzenernähr. Düngung Bodenk. A **31**, 57 (1933).
10. JENNY, H., OVERSTREET, R. and AYERS, A. D., Soil Sci., **48**, 9 (1939).
11. LUNDEGÅRDH, H., Protoplasma, **35**, 548 (1941).
12. LOOSJES, R. and SCHUFFELEN, A. C., Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 475 (1941).

Palaeontology. — *On fossil Freshwater Rhizopoda from tropical Moors in Sumatra and Borneo.* By H. R. HOOGENRAAD and A. A. DE GROOT. (Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

I. Introduction.

In 1939 we received from Miss Dr. E. POLAK, then working at the "Bodemkundig Instituut" at Buitenzorg, a number of samples of peat, gathered by her in Sumatra and Borneo, to be examined upon the fossil rests of Rhizopoda. We gladly accepted this invitation, which was welcome to us for more than one reason.

In the first place one of us had paid of late years special attention to the fossil Rhizopod forms in peat-deposits (HOOGENRAAD, '34, '36) and had compared his own findings with those obtained till now by other European investigators. Further such an investigation would be quite new for tropical moors. And finally we had the possibility of comparing our new results on one hand with the recent Indo-malayan material recorded in our publication of '40 and with the fossil European, summarized in the "Zusammenstellung" ('36) on the other.

In total we got 9 samples, 6 from Sumatra (Djambi) and 3 from Borneo. In general the Rhizopod rests proved to be rather scarce; in two of the samples there were even no Rhizopoda at all. From the remaining, in the list p. 734 numbered I—VII, only the first two were somewhat richer in fossil rests, the other containing but a few individuals.

The treatment of the material was simple. It was soaked in distilled water, pulverized if necessary, sifted and decanted, the last action to obtain fractions of distinct fineness. The material was partly examined directly in this state, partly after boiling with diluted ($\pm 5\%$) KOH-solution, this to clear up the darker, more humified elements. The microscopical examination was made on common slides under cover-glass; some objects were enclosed in glycerin-gelatin. As in our publication '40 we have tried by adding one of the numbers 1—6 to each of the species to indicate their relative frequency, 1 meaning very rare, 6 very common. Though from various causes this scale must be considered as one of limited importance and more or less unequal too, it may, however, characterize in some way the scarceness or commonness of the species in a sample. These numbers have not been estimated roughly or at random, but were derived from counting all the individuals occurring in a fixed number of preparations.

II. Survey of the species observed.

Number of
the sample.

- I. *Arcella* spec. 1; *Centropyxis aculeata* 3, *constricta* 2, spec. 1; *Trigonopyxis arcula* 2, *idem var. fabiformis* 1, spec. 1; *Diffugia* ?*acuminata* 1, *bacillifera* 1, *globulosa* 1, *oblonga* 2, spec. 1; *Heleopera* spec. a 1, spec. b 1; *Hyalosphenia subflava* 4; *Nebela* *barbata* 2, *caudata* 1, ?*galeata* f. *minor* 2, *griseola* 1, ?*lageniformis* 1, ?*militaris* 1, *spicata* 1, ?*tubulosa* 1, spec. 1; *Quadrula* spec. 1; *Phryganella hemisphaerica* 1; *Euglypha acanthophora* 1; *Trinema lineare* 1; *Problematicum* 3.
- II. *Arcella* ?*artocrea* 1, ?*discoidea* 1, ?*vulgaris* 1; *Centropyxis aculeata* 1, *constricta* 1, ?*orbicularis* 1, spec. 1; *Trigonopyxis arcula* 3, spec. cf. „*microstoma*” 1, spec. 1; *Diffugia* ?*oblonga* 1; *Heleopera* spec. c 1; *Hyalosphenia subflava* 3; *Nebela* cau-

data 2, *?cratera* 1, *?penardiana* 1, *spicata* 1, *spec. f. retorta* 1, *spec. 1*; *Quadrula symmetrica* *?var. longicollis* 1; *Phryganella hemisphaerica* 1; *Euglypha acanthophora* 1, *spec. 1*; *Trinema complanatum* 1, *enchelys* 1, *lineare* 1; *Problematicum* 1.

- III. *Centropyxis aculeata* 1, *constricta* 1, *?orbicularis* 1; *Trigonopyxis arcula* 1; *Difflugia globulosa* 1, *spec. 1*; *Heleopera spec. d* 1; *Nebela caudata* 1; *Euglypha spec. 2*; *Placocista spec. 1*; *Trinema ?complanatum* 1, *enchelys* 1, *?lineare* 1.
- IV. *Centropyxis ?constricta* 1; *Hyalosphenia subflava* 2.
- V. *Trigonopyxis arcula* 1; *Euglypha ?cristata* 1.
- VI. *Arcella spec. 1*; *Centropyxis aculeata* 1; *Hyalosphenia subflava* 1.
- VII. *Trigonopyxis arcula* 1; *Hyalosphenia subflava* 1.

III. Remarks on some species.

Centropyxis aculeata.

Of this species, composed of a very heterogeneous group of forms, sample I contained a population, exceedingly variable in shape and size of the shell, place and form of the aperture and in the degree in which the shell was covered with xenosomes. We could not identify all these different forms with the several types distinguished by DEFLANDRE, but we were able to distinguish the following varieties with more or less certainty.

a. A large, robust form, on the whole highly incrusted. In outline broad-elliptic to more or less quadrangular with rounded angles; aperture highly excentric. A few particles of sapropelium mingled with the preponderating quartz-elements. The distal border of the aperture furnished with pretty regularly arranged lumps of quartz, some of them up to 40 μ in size. Especially the fundus is often very irregular in outline owing to the big, far-projecting masses of quartz. Number of spines small, often 0, sometimes 5.

Dimensions: long 183—273, broad 173—217 μ (a dubious individual long 150, broad 133 μ); aperture long 50—73, broad 73—100 μ (the dubious one: aperture circular, diameter 60 μ).

b. (Fig. 1—4). A variety of medium size, fragile with no or hardly any incrustation, of a greyish yellow or light brown colour, often turning to red-brown, especially in the individuals treated with KOH. Structure very finely and regularly granulated; xenosomes scarce, often only some larger or smaller quartz-grains on the fundus. Form of the shell in general very regular, broad-elliptic, sometimes nearly circular. Aperture highly excentric, broad-elliptic, placed athwart, with inward bent border, the circular individuals having also their aperture more or less circular and nearly in the centre of the shell. Spines few in number, never more than 5, occasionally lacking, perhaps broken off. The spines lying nearly in one level are usually gathered on the posterior border of the fundus; sometimes, however, they are scattered along the posterior half of the surface of the shell, the most forward ones more or less opposite to another. On one individual some plates of *Quadrula spec.* could be observed among the other xenosomes covering the shell.

Dimensions: long 90—130, broad 70—110 μ ; aperture long 27—50, broad 30—47 μ ; one individual long 150, broad 133 μ , aperture circular, diameter 57 μ .

Centropyxis spec. (Fig. 5—8).

Perhaps this species, rather abundant in this sample and presenting a great variety of forms, sizes and structures, does not belong to the genus *Centropyxis* at all. In this case, however, we should not know where to class it. The shell is as a rule broad-elliptic or oval, sometimes more or less irregular, rather highly compressed. The aperture, broad-elliptic too, is always highly excentric, nearly terminally placed. No spines whatever were observed. The structure of the shell appears chiefly chitinous, covered with small irregular particles, mostly sand-grains, intermingled in some cases with the elliptic plates of a *Nebela spec.* or the rectangular ones of a *Quadrula spec.*, the latter $\pm 10 \mu$ in size. The colour was mostly greyish and sometimes slightly reddish.

Dimensions: long 73—140, broad 53—117 μ .

A smaller, but similar form, sometimes colourless and with fine quartz-particles, or

yellowish and more chitinous, occurred much rarer in sample II. This form is probably identical with the recent *Centropyxis ?constricta* from the G. Pangerango and the G. Gedeh, Java, described in our publication '40.

Dimensions: long 60—93, broad 40—63 μ .

The population of sample II of this species contained some individuals of a rather large form with a broad-elliptic shell and ditto excentric, cross-placed, slightly inverted aperture, and some smaller ones with circular, excentric aperture, possibly also intermediate forms, see notes on dimensions.

Dimensions: a. the larger form, long 167—210, broad 150—167 μ ; aperture long \pm 60, broad \pm 75 μ ; a single individual long 267, broad 193 μ , aperture long 83, broad 100 μ .

b. the smaller form, long 83—120, broad 80—110 μ ; aperture circular, diameter \pm 100 μ . Besides some specimens of intermediate size, long \pm 150, broad \pm 140, aperture \pm 50 μ .

Centropyxis ?orbicularis. (Fig. 9).

In sample III occurred a beautiful form of this genus, only in a small number of individuals, belonging to the species *orbicularis* or nearly related to it. Fundus nearly circular in outline, in side-view a little compressed; aperture with a sharp edge, regularly bent, with one or two ranges of big quartz-grains.

Dimensions: long 70—110, broad 80—92 μ .

Trigonopyxis arcula.

Sample I contained a rich population of this species with the following varieties.

a. (type). Showed the usual structure of the species: a chitinous ground-substance, abundantly covered with a chequered mosaic of xenosomes of several kind, for the greater part sapropelium-particles, sometimes mixed with quartz and then more or less difflugoid (Fig. 10). Aperture usually three-lobed with blunt edges and thickened border, variable, however, in details, the thickening of the border sometimes wanting.

Dimensions: 77—197, aperture 13—40 μ .

b. (small variety). Besides a form occurred in general with the typical *Trigonopyxis*-structure, -aperture and -border, but in some respects diverging from the type and of minor dimensions.

Dimensions: 50—80, aperture 10—20 μ .

c. (Fig. 11). We believe to have found in this sample some individuals too, of a form found by RICHTERS ('07) in recent mosses from the Banka-islands and described by him as the *var. fabiformis*. It differs from the type firstly by the broad-elliptic shape, secondly by the more chitinous structure of the shell with only few or no xenosomes, thirdly by the shape of the aperture, which forms an isosceles and not an equilateral triangle as in the type.

In sample II occurred a rather abundant population of this species, somewhat aberrant in structure, being more chitinous owing to the scarcity of xenosomes (see also the next form). Sometimes the shell contained a number of frustules of Diatoms. The shape was the normal one; a single narrow-elliptical shell was observed with an aperture of the same form. This individual, reminding us of the *var. fabiformis* of RICHTERS, was the only one observed having this form; a more regular occurrence of such forms might lead us to the conclusion that the importance of these varieties is not very great. In general the thickened border of the aperture was normally developed, also in the deviating individual. The shape of the aperture was rather variable, from typically triangular to irregular or quadrangular. Also in size the material was very variable, but the frequency of the different magnitudes was not great enough to ascertain the existence of different categories.

Dimensions: 80—183, aperture 16—37 μ .

Trigonopyxis spec. cf. „microstoma”. (Fig. 12).

Mingled with the other forms of the genus *Trigonopyxis* in sample II a variety occurred, perhaps a different species, especially distinguished by the nearly round and much smaller aperture. The shape of the shell was similar to that of the type, viz. nearly circular as seen from the fundus pole. The structure was also the same and varying in the same manner. The slightly inverted aperture, placed concentric, was for the greater part circular, in a few cases irregular, seldom broad-elliptic. Usually a typical rimmed border around the aperture could be observed, sometimes, however, as in the type, the thickened edge was wanting or hardly visible. This peculiar form resembled in some way a species — not yet described — we met with in recent material from N. Zealand and N. Foundland, which was provisionally indicated as *Trigonopyxis microstoma*, but differed from the latter by the larger aperture and the structure of the shell, the structural characteristic being, however, in our opinion of no great importance.

Dimensions: 100—160, aperture 17—24 μ .

Problematicum. (Fig. 13—15).

In a rather great number the samples I and II contained a problematicum we might describe as follows. In normal projection, i.e. the aperture-fundus-axis vertical, the outline of the shell was mostly circular or by way of exception broad-elliptic. In side-view it proved highly flattened, resembling therefore the half-spherical one of any *Phryganella*. The aperture, rather deeply invaginated, was always placed concentric with the outline of the shell and of the same form of the latter. The shell-structure was very variable, sometimes typical difflugiod, covered almost entirely with quartz, often in very big lumps. Other individuals presented a beautiful nebeloid structure with elliptic, round or irregular plates, closely serried, mostly colourless, sometimes faintly yellow or reddish. In a single case many plates of a *Quadrula spec.* occurred among the elliptic elements. The border of the aperture was mostly smooth, a few times, however, pretty regularly lobed by inward projecting quartz-particles.

Dimensions: in sample I long 150—250, aperture 23—70 μ ; in sample II long 180—213, aperture 33—67 μ ; one elliptic individual long 203, broad 173 μ , aperture long 63, broad 33 μ .

Hyalosphenia subflava. (Fig. 16).

This species is, in our opinion, still a somewhat problematic form. In our material it occurred in all the samples containing *Rhizopoda*. CASH ('09) first described it with reference to individuals met with already in 1891 in a locality near Manchester, England. Thereafter CASH found it in the Pentlands, Midlothian, 1905. In later years it is recorded by WAILES and PENARD ('11) from 7 localities on Clare Island, Ireland, further from Queensland, Australia (PENARD '11), France (DEFLANDRE '29), Germany (JUNG '36) and as fossil form only by WAILES and PENARD (l.c.) in the „Peat-deposit” of Clare Island, a sphagnum-moor of which the botanical and pollen-analytical investigation has not been made yet and of which the geological age is unknown. We ourselves came across it only in fossil material of three places in moors of the Netherlands: Winterswijk, Tienhoven and Barger-Oosterveen; of other records in fossil state we have no knowledge.

CASH (l.c.) says that he has been empty shells almost exclusively; only one locality gave one or two living but not active individuals without pseudopods. Further it is remarkable that, according to CASH, the dimensions of this species are of great constancy, viz. 73—87 μ ; in the fossil tropical forms here described these limits were much wider. For the rest the appearance of the shell is very characteristic and therefore not easily mixed up with other species of the genus *Hyalosphenia*. No more than PENARD did we observe an apical pore as mentioned by CASH, neither on recent, nor on fossil material.

Dimensions: in sample I long 43—137, broad 30—87 μ in sample II not determined; a single individual long 147, broad 97 μ .

Nebela barbata. (Fig. 17—20).

This species was wanting in the recent tropical material we examined; in the fossil sample I it occurred in an abundant population. The examination of it confirmed our conviction, obtained from a material, scanty however, of the Netherlands, that this species is not to be tabulated with *Nebela penardiana* (= *N. americana*), as some authors have done, but is to be considered as an autonomous one.

The population varied extremely in form, colour and size. The characteristic cilia, giving the species its name, were sometimes abundant, sometimes scarce or absent (see LEIDY '79). In full development the cilia-covering often extended over the neck up to within a short distance of the aperture. In general the appearance of the shell was that of the type, often with a very prolonged, narrow cylindrical neck. On some individuals, however, the aperture looked very odd, owing to a membranaceous, colourless, crenulated appendix like a thin collar before the more solid border proper; in the KOH-treated individuals it was yet more distinct than in the material not so treated. As far as we can ascertain, this peculiarity has hitherto never been observed in this or another *Nebela*-species. The shell was of a yellowish or brownish colour, in some (young?) individuals hardly any colour was visible. The structure, mostly well preserved, showed elliptic, not imbricated plates, long \pm 10, broad \pm 7 μ . Cilia up to 30 μ in length. A single specimen was built up entirely of *Quadrula*-plates; another contained a number of reserve-plates; for the rest no contents were observed. We have seen no pores.

Beside the type occurred a smaller form, resembling in several respects a small variety of *Nebela lageniformis*, but differing from it by the structure of the aperture. This variety was colourless, often without cilia, the above-mentioned collar around the border of the aperture less distinct. A single individual of this variety was somewhat yellowish and furnished with cilia and the 'conspicuous collar. Beside this we observed a small specimen without collar or cilia, but presenting a slightly crenulated border of the aperture.

Dimensions: With reference of the dimensions we could clearly distinguish three different classes:

a. long 62—81, broad 30—33 μ ; b. long 92—140, broad 40—67 μ ; c. long 168—197, broad 65—90 μ . These three classes of magnitude were distributed over the whole population in the ratio 10 : 79 : 11. A single individual, set apart by its extraordinary size, was long 257, broad 120, the neck long 107, broad 33 μ .

Nebela caudata. (Fig. 21).

Sample II contained a not abundant population of this species, which also occurred in I and III, here, however, in but a few individuals. The border of the aperture was often not well defined, sometimes, however, crenulated by the exterior edges of the plates, occupying it. Structure more or less nebeloid; number of the 'caudae', i.e. spines, very variable, mostly 0—6, perhaps now and then broken off.

Dimensions: long 77—160, broad 53—117 μ .

Nebela spicata. (Fig. 22—24).

Some shells in samples I and II, very similar to those of *N. caudata*, differed, however, considerably from them by their much greater dimensions. Therefore we may reckon this form to the species *N. spicata*, until now recorded only by WAILES from recent sphagnum of S. America (Columbia, Peru), though the characteristics did not in every respect correspond with the diagnosis given by WAILES. Edge of the aperture often very distinctly crenulated; structure sometimes nebeloid and the same as that of *N. caudata*, sometimes aberrant. 'Caudae' up to 6 in number, up to 40 μ in length.

Dimensions: in sample I long 133, broad 110—117 μ ; in sample II long 126—160, broad 93—117 μ . WAILES found: long 120—140, broad 100—125 μ .

Nebela spec. f. retorta. (Fig. 25).

In sample II a few individuals of a *Nebela*-form occurred with the neck of the shell distinctly bent sideways. Structure typically nebeloid with round or elliptic plates, the

edges overlapping each other in some way. Border of the aperture smooth. Already LEIDY ('79) described from N. America such a form, which he recorded as *N. collaris* var. *retorta*; he found only one specimen. The individuals of WAILES ('13) also came from N. America, occurring in two localities which presented also two species of *Nebela*, viz. *N. penardiana* (= *N. americana*) and *collaris*; of both species some *retorta*-forms were met with. This was also the case with *Quadrula symmetrica*, which fact led WAILES to suppose that these forms were not autonomous species, but merely structural varieties. In our material only one such specimen occurred among individuals of *Nebela caudata*, *?cartera*, *penardiana* and *spicata*; we are not sure to which of these species the *retorta*-form belongs; it seems to us to be related to *N. penardiana*.

Dimensions: long $\pm 70 \mu$; those of WAILES 130—170 μ .

Already in two former cases we observed similar *Nebela*-individuals. In the first place we found a number of them similar in shape and size in some recent sphagnum-samples from Buitenzorg (not published till now). On these shells the neck was very distinctly developed and strongly curved sideways, sometimes imperceptibly, sometimes rather abruptly angular. The shell was built up by round, imbricate plates; the border of the aperture crenulated by the projecting edges of the border-plates. Apart from the curved neck these individuals resembled *N. tubulata* to a certain extent.

Dimensions: long 90—107, broad 33—53 μ ; neck long 23—33, broad 15—20 μ .

In the second place two recent sphagnum-samples from N. America gave some *Nebela*-shells similarly formed; one of the samples presented but one specimen, the other seven, all of them much the same. The shell was colourless or slightly yellowish, the structure rather indistinct with small round or elliptic, not imbricated plates the border of the aperture smooth. A narrowed distinct neck was wanting, but the buccal part of the shell was turned sideways.

Dimensions: long 107—140, broad 53—67 μ .

Nebela spec. (Fig. 26).

In a not over-numerous population in sample I a species of *Nebela* occurred, which we cannot identify with certainty, but which doubtless belongs to the curious form-complex *Nebela penardiana-gracilis-galeata* f. *minor* (see our publication '35). The individuals observed being nearly similar it is evident that they belong together to one form of the genus. The shell was completely colourless, nearly ovoid, without any indication of a neck, rather strongly compressed. Structure typically nebeloid, with larger and smaller mostly elliptic plates; in a few individuals the plates had a dark spot in the centre (a hole?). Border of the aperture sharply cut off, not or only a little thickened. Beside this type some specimens occurred, approaching in some respects to *N. militaris*, but neither in these forms nor in the type did the narrow part of the shell ever taper into a decided neck.

Dimensions: long 83—150, broad 43—100 μ .

In sample II occurred a few individuals, apparently similar to or identical with the population of sample I. Structure normally nebeloid.

Dimensions: long ± 113 , broad $\pm 60 \mu$.

IV. Summary.

Considering the list of the species it strikes one first that a relatively great number of dubious forms had to be marked with a ?, because they could not be classed with one of the wellknown and satisfactorily described species. Their number amounts to $\pm 60\%$ of the total of the observed species and is therefore substantially higher than in the recent samples from the Netherlands East Indies, examined by us, where this percentage was only 27 on a total of 64 species, spread over 17 genera. It may be reasonably supposed that the tropical associations are composed of forms sufficiently different from the related European ones, on which the diagnoses bear, to overstep the limits of the species. It is a wellknown fact that also in the study of the European associations such difficulties

are met with, though perhaps on a smaller scale. Moreover so little attention has yet been paid to the tropical Rhizopod associations, that we still have no firm ground for comparing them with the European ones. However tempting it may be to describe these aberrant forms as varieties or even as new species, we hesitate to apply this method because the limits of a „species” in this group of organisms are often so vague that in many cases it is not possible to state whether an aberrant form falls within these limits or not.

On closer inspection of the list, considering provisionally as autonomous species the not precisely defined forms as well as the correctly determined ones, we find that the genus *Nebela* turns out to be at the top in respect of the number of species: 12 species, i.e. 29 % of the total. This percentage of the fossil material is just the same as in the recent associations of moss-rhizopods from Sumatra and Java (see our publication '40), the number of *Nebela*-species among the latter being 30 % of the total. The number of species of *Difflugia*, however, receded far into the background, attaining only 5, i.e. \pm 12 % of the total (in the recent material but 7 %). These numbers sharply contrast with the data of HARNISCH ('32), recording 20 species of *Difflugia* and but 6 of *Nebela* in a total of 67, i.e. resp. \pm 30 % and \pm 9 %, also approximately just the inverse ratio. In another publication ('40) we pointed out that this fact was no doubt owing to the quite different environments from which HARNISCH and we ourselves obtained our — recent — material. It is obvious that the great conformity in this respect between our fossil and our recent material may be explained by supposing that these two groups of associations, fossil and recent, have come from environments of the same kind, viz. mosses living on the ground or on the stems of trees. The peat-deposits from which the fossil samples were taken belonged to the oligotrophic, ombrogen type as distinguished by POLAK; the material does not consist of sphagnum, which is here of no great importance as a peat-builder, but of rests of trees (POLAK '33).

It should be noticed, that among the species of the genus *Nebela* in our material the typical forms of the southern hemisphere: *N. certesi*, *martiali* and *vas*, did not occur at all in the fossil, but were abundantly represented in the recent material.

The nature of the peat-moors, from which our material was taken, fully explains why the genera *Amphitrema* and *Hyalosphenia* — the latter with exception of *H. subflava* — are lacking in the fossil material. Also in the recent samples these genera were not represented. Nevertheless *Bullinula indica* and both the species of *Assulina* — *A. muscorum* and *seminulum* — were more or less abundant in the recent, but lacking in the fossil material. The number of species of the genus *Euglypha* was rather small in the latter in comparison with that of the recent samples.

Trying at last to compare the fossil tropical associations with those of European origin, it should be borne in mind, that records about the first type mentioned are completely wanting as yet and of the second are still scarce. Therefore it will be surely untimely and hazardous to draw any far-reaching conclusions from the data hitherto available.

The main results of our examination of the tropical fossil material are the following. 1. The relatively great number of species which could not be identified with a satisfactorily degree of certainty with any species yet described. 2. The predomination in species of the genus *Nebela*. 3. The small importance of the genus *Difflugia*. 4. The lacking of the special so-called sphagnicolous forms. 5. The presence — often in great numbers of individuals — of *Hyalosphenia subflava* in nearly all the samples.

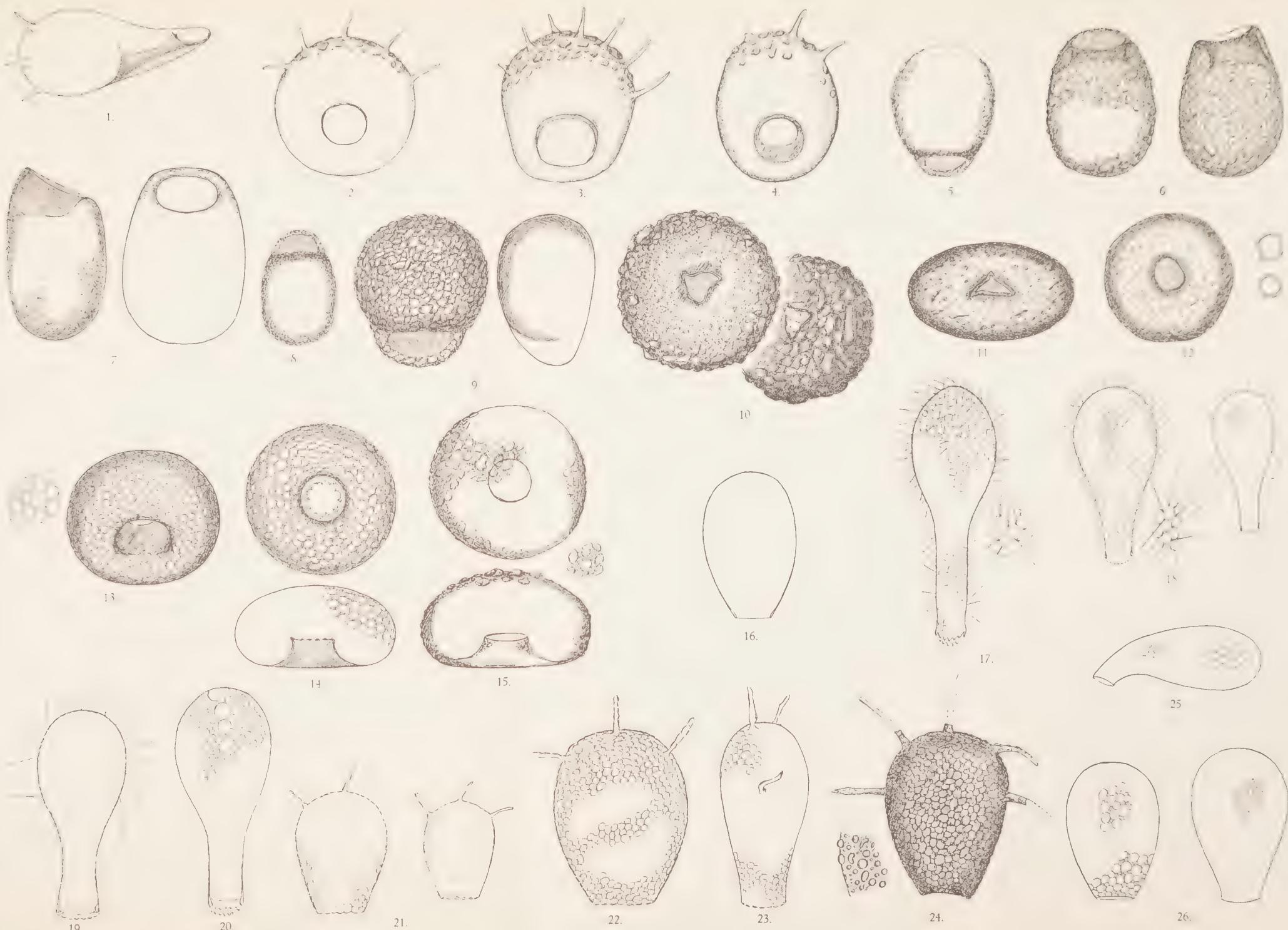
As already mentioned these peculiarities are no doubt connected with the special character of the moors in which the material was deposited.

The European fossil associations recorded in the „Zusammenstellung” ('36) could be summarized in three groups:

1. Lacustrine deposits (I, VII, XIV);

2. Peat-bogs (III, XII);

3. Peat-moors (the remaining ones, except VI, Russia, being probably a combination of associations of different types). For the rest it is probable that these three types



cannot always be sharply separated. From any of these the tropical fossil associations are different in many respects. Should it be allowed to ascribe this fact to the peculiar nature of the moors in which the material had its origin, then we may explain it from the connection between the composition of the associations and the environment in which they are living. The facts we have at our disposal give us no reason, however, to carry this connection as far into details as STEINECKE ('29) has tried.

V. Literature.

CASH, J. and J. HOPKINSON (1909), The British Freshwater Rhizopoda II.
 DEFLANDRE, G. (1929), Le genre *Centropyxis*. Arch. f. Protistenk. 67.
 ————, (1936), Etude monographique sur le genre *Nebela*. Ann. d. Protistol. 5.
 HARNISCH, O. (1932), Die testaceen Rhizopoden der deutschen limnologischen Sunda-Expedition. Arch. Hydrobiol. 11.
 HOOGENRAAD, H. R. (1934), Studien über die spagnicolen Rhizopoden der niederländischen Fauna. Arch. f. Protistenk. 84.
 ————, (1936), Zusammenstellung der fossilen Süßwasserrhizopoden aus post-glazialen Sapropelium- und Torfablagerungen Europas. Arch. f. Protistenk. 87.
 ————, und A. A. DE GROOT (1935), Rhizopoden und Heliozoen aus dem Süßwasser der Niederlande. Arch. Néerl. Zool. I.
 ————, und A. A. DE GROOT (1940), Moosbewohnende Thekamoebe Rhizopoden von Java und Sumatra. Treubia 17.
 JUNG, W. (1936), Thekamöben ursprünglicher lebender deutscher Hochmoore. Abh. Landesmus. Westfalen 7.
 LEIDY, J. (1879), Freshwater Rhizopods of North America. U.S. Geol. Survey 12.
 PENARD, E. (1911), Rhizopodes d'eau douce. Brit. Antarct. Exp., Vol. I, Biology.
 POLAK, E. (1933), Ueber torf und Moor in Niederländisch Indien. Verh. Kon. Akad. v. Wet., Amsterdam, Afd. Natuurk., 2de Sectie, 30.
 RICHTERS, F. (1907), Moosfaunastudien. Ber. Senckenb. Naturf. Ges.
 STEINECKE, F. (1927), Leitformen und Leitfossilien des Zehlaubruches. Bot. Arch. Königsberg.
 ————, (1929), Die Nekrozönosen des Zehlaubruches. Schr. Phys.-ök. Ges. Königsberg 66.
 WAILES, G. H. (1913), Freshwater Rhizopoda from North and South America. Journ. Linn. Soc. London, Zool. 32.
 ————, and E. PENARD (1911), Rhizopoda. Clare Island Survey, Pt. 65. Proc. Roy. Irish Acad. 31.

VI. Explanation of the Figures.

Fig. 1—4. *Centropyxis aculeata* forma b. \times 300. — Fig. 5—8. *Centropyxis* spec. \times 250. — Fig. 9. *Centropyxis* ?orbicularis. \times 225. — Fig. 10. *Trigonopyxis arcula*. \times 180. — Fig. 11. *Trigonopyxis arcula* var. *fabiformis*. \times 250. — Fig. 12. *Trigonopyxis* cf. „*microstoma*”. \times 180. — Fig. 13—15. *Problematicum*. \times 135. — Fig. 16. *Hyalosphenia subflava*. \times 225. — Fig. 17—20. *Nebela barbata*. \times 250. — Fig. 21. *Nebela caudata*. \times 200. — Fig. 22—23. *Nebela spicata*. \times 300. — Fig. 24. idem \times 225. — Fig. 25. *Nebela* spec. f. *retorta*. \times 415. — Fig. 26. *Nebela* spec. \times 270.

Anatomy. — The role of the postcardinal vein in the development of the inferior vena cava. By J. AUËR (prosector). (From the anatomical department in the medical faculty of the Utrecht University. (Director: Prof. A. J. P. v. D. BROEK.) (Communicated by Prof. G. KREDIET.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

The role of the postcardinal vein in the development of the inferior vena cava.

Since HOCHSTETTER (1893) published his valuable work on the development of the inferior vena cava research of this problem did not come to a standstill and it is of importance in regard to our own work to deal with the extensive literature before we are able to point out our criticisms and our own view on this subject.

The inferior vena cava especially in embryology may be divided in a prerenal and a postrenal division. The prerenal division can be described as utterly without any difficulty so far as its development is concerned. Already HOCHSTETTER noticed the formation of this division due to the development of an anastomosis between the right omphalo-mesenteric vein and the postcardinal vein, the latter being the first embryonic vein situated in the dorsal body wall opening into the heart in connection with the anterior cardinal vein. This anastomosis, also described by RAVN (1889) lies in the so-called caval mesentery, the development of which can easily be understood in the light of BROMAN's work (1938) on the formation of the omental bursa. The explanation given by RAVN and HOCHSTETTER (accepted by all textbooks) with regard to this mesentery cannot be true as they pointed out that it must be a special mesentery, that is to say a third one, besides the ventral and dorsal mesentery. BROMAN definitely explained that the development of the omental bursa splits the mesentery into two layers. We may thus conclude that the right layer can only be regarded as part of the dorsal mesentery and it will also be clear that it is through this right layer that the liver meets the dorsal body wall. The right omphalo-mesenteric vein at last communicates with the caudal elements of the inferior vena cava through this layer which has thus been called the caval mesentery. The continuation of this communication in a caudal direction is, according to HOCHSTETTER, the postcardinal system, that is to say a branch of the postcardinal vein. LEWIS (1902) could not agree to this opinion and looked upon this branch as a special system of veins (a right and left vein) which he called the subcardinal veins. It seems that HOCHSTETTER too observed these veins but his interpretation was not quite correct, for he supposed them to belong to the cardinal system. The following conclusion of his may support this criticism as he says: „Caudalwärts von der Abgangsstelle der A. omphalo-mesenterica angelangt, teilt sich die Vena cava in zwei Äste, der eine biegt dorsalwärts um und verbindet sich mit der Vena cardinalis posterior dextra, der andere kreuzt die Aorta und verbindet sich links von derselben mit der Vena cardinalis sinistra” (l.c., HOCHSTETTER, 1893).

This communication in front of the aorta is, according to HOCHSTETTER, to be regarded as an anastomosis between the radical branches of the inferior vena cava belonging to the cardinal system. Be that as it may; detailed observation also after LEWIS, for instance by HUNTINGTON, MC CLURE and BUTLER (see page 743) revealed that the radical branches mentioned by HOCHSTETTER are a new system situated on the mesial side of each WOLFFian body. This system of veins, especially the right subcardinal vein together with the hepato-subcardinal junction (the anastomosis between the right omphalo-mesenteric vein and this subcardinal vein), forms the prerenal division.

Soon after LEWIS' researches a new era of intensive investigation of the whole problem began of which the work of MC CLURE (1900 etc.), HUNTINGTON and MC CLURE (1907, 1920) and MC CLURE and BUTLER (1925) should be mentioned in the first place.

It was not so much on the prerenal division they differed from opinion with the former authors as on the postrenal division, about which they came to an altogether different conclusion. As this conclusion is becoming more and more familiar to textbooks we feel obliged to deal with it especially because of some objections that may be mentioned against these researches. HUNTINGTON and MC CLURE, by using cat embryos, came to the conclusion that the postcardinal vein does not participate in the formation of the inferior vena cava as the former has only something to do with the drainage of the WOLFFian body and finally disappears in the course of development. They suppose the postrenal division to be formed by a new system of veins that is not synonymous with the postcardinal system (the dorsal limb of the periureteric ring described by HOCHSTETTER).

These veins were to develop dorso-medial to the primitive postcardinal veins and dorso-lateral to the aorta while they should secondarily receive the somatic postcardinal tributaries, that is to say the segmental veins. It is of importance to mention the anastomosis of these so-called supracardinal veins with the postcardinal veins of which they said: "This anastomosis we have designated as the subcardino-supracardinal anastomosis since in the later stages it appears to connect the subcardino-postcardinal anastomosis with the supracardinal vein."

This supracardinal system could be followed by these authors from the level on which the iliac veins unite with the postcardinal vein as far as the common cardinal vein and even more craniad in the thoracic region. They pointed out however that as soon as the supracardinal vein comes into existence the iliac veins change their direction from the postcardinal veins to the supracardinal veins; a queer statement though. It may easily be understood that HOCHSTETTER's opinion, also quoted by ZUMSTEIN (1896) and VAN GELDEREN (1925, 1927) is in utter contradiction with the conclusion of the American authors of whom we also like to mention miss SABIN (1915), and REAGAN (1919, 1927). It thus remains to be solved whether the caudal part of the postcardinal vein participates in the cava formation (RATHKE, RAVN, ZUMSTEIN, HOCHSTETTER, LEWIS, VAN GELDEREN) or forms a new system, the supracardinal system, this being quite different from the postcardinal system (MC CLURE, HUNTINGTON, miss SABIN, BUTLER, REAGAN). A review of HOCHSTETTER's figures as well as of those of HUNTINGTON etc. makes it quite clear that all authors did not uniformly use the same nomenclature with regard to the postcardinal system. It seems that the "Urnierenvene" of HOCHSTETTER is identical with the postcardinal vein of HUNTINGTON c.s., whereas the postcardinal vein of HOCHSTETTER appears to be the supracardinal vein. It is rather strange to read: "It is of importance to note that the supracardinal veins are not in any sense merely synonymous to the dorsal limb of the periureteric ring described by HOCHSTETTER." (HUNTINGTON and MC CLURE, l.c.)

The above described details make us believe that three factors are in principle responsible for the difficulties that have arisen since the researches of HOCHSTETTER.

Primarily the lack of attention paid to the changes in the environment of the embryonic vena cava inferior must be considered as a definite mistake, for we assume the growth of the WOLFFian body and its consecutive loosening from the dorsal body wall of primary importance. Also the migration of the permanent kidney as well as of the bifurcation of the aorta should be considered as factors that play a certain part in the formation and the position of the inferior vena cava.

Secondarily the nomenclature used by all authors has been a source of real misunderstanding to every embryologist and therefore alone it might be advisable to give a critical review of the subject.

Thirdly the different material must be regarded as a misleading factor that has not quite been realised; for it may be clear that a certain mode of development cannot be generalised as has so often been done e.g. by HUNTINGTON and MC CLURE.

In view of these difficulties we have again examined a series of pig embryos in order to attain a critical view on the problem and to find a plausible explanation especially with regard to the development of the postrenal division of the inferior vena cava.

Miss SABIN and REAGAN also used pig embryos in their researches. They injected their material with india ink and especially miss SABIN made use of the SPALTEHOLTZ method of clearing the embryos. As far as the prerenal division is concerned both miss SABIN and REAGAN agreed with HUNTINGTON and MC CLURE but they differed in many respects on the postrenal division. According to REAGAN's observations the supracardinal veins indeed participate in the formation of the inferior vena cava but have nothing to do with the later azygos veins in the thoracic region as was indeed concluded by HUNTINGTON, MC CLURE and BUTLER. These azygos veins develop between the sympathetic ganglia while the supracardinal veins lie lateral to this sympathetic system. Miss SABIN distinguishes in pig embryos a lateral and a medial part of the so-called prevertebral plexus of veins. The medial part contributes to the formation of the azygos veins in the thoracic region, while the lateral part takes part in the formation of the inferior vena cava in the lumbar region (postrenal division). REAGAN (1927) also pointed out that different opinions give rise to great confusion especially with regard to the azygos system of veins. However the latter system cannot be dealt with in this paper though the problem is more or less linked with our own problem of cava development in the lumbar region. In 1938 GRUENWALD again examined the whole problem in human embryos. He critisized the work of HUNTINGTON, MC CLURE and BUTLER and rehabilitated to a certain extent the classic researches of HOCHSTETTER, though he discovered a new vein in the region of the permanent kidney which he called the sacrocardinal vein. This vein according to GRUENWALD cannot quite be identified with the postcardinal vein in this region as the latter is to be found in front of the umbilical artery, draining the mesonephros, while the former is situated dorsal to the umbilical artery. He suggests that this vein is the principal element of the postrenal division of the inferior vena cava anastomosing by way of the anastomosis sacrocardino-subcardinalis with the prerenal division.

GRUENWALD describes the inferior vena cava as being formed by connection of the sacrocardinal vein of the right side and the right subcardinal vein. Of course the inter-subcardinal anastomosis facilitates the drainage of the left side into the right side. The supracardinal veins, though according to GRUENWALD not participating in the formation of the inferior vena cava, appear in 13 mm human embryos, lying lateral to the sympathetic chain and cranial to the level of the suprarenal gland. They should replace the postcardinal vein above that level as the postcardinal vein is being pushed laterad by the continuous growth of the WOLFFian body. Above the level of the WOLFFian body the supracardinal vein finally opens into the postcardinal vein. This remark of GRUENWALD will be discussed later as it has been of great importance to our interpretation of the whole problem in pig embryos. Our series consisted of 5—6—7—11.5—12—18.5 and 25 mm embryos, which have proved sufficient for the examination of the younger phases of cava development. Reconstructions according to the principle introduced by DANKMEIJER (1939) were made of the 6, 7, 11.5 and 18.5 mm stages in order to specify linear drawings designed after careful observation of the serial sections. Compared with HOCHSTETTER's youngest stages our 5 mm pig embryo also shows only one vein in the region caudal to the heart. This postcardinal vein indeed is the first embryonic vein in this region and drains the primordial urogenital system, the segmental veins and the primordium of the lower extremity, though the latter cannot yet be seen in this young embryo. We do not think it necessary to distinguish a pair of "caudal veins" as the origin of the postcardinal veins in the most caudal part of the body. Our serial sections and reconstructions rather show one continuous blood vessel, situated at the dorsal border of the WOLFFian body and lateral to the primitive aorta on both sides, while the vessel finally opens into the common cardinal vein of CUVIER. Its origin as an off-spring of the aorta to which miss SABIN drew attention is still to be seen because of the anasto-

moses present between the aorta and this vein. According to VAN GELDEREN the postcardinal vein may well be called the first portal vein of the WOLFFian body and thus the first portal circulation of the WOLFFian body is directed dorsad, for the vein occupies a dorsal position.

The growth of the mesonephros and the consecutive loosening of this organ from the dorsal body wall results in the development of a mesentery-like attachment of the WOLFFian body with this wall. This phenomenon is clearly demonstrated in our stages of 5 mm up to 25 mm and it will be easily understood that it must be of great influence on the drainage of the WOLFFian body, which however also accounts for another process e.g. the process of migration taking place with the bifurcation of the aorta. The relative change of this bifurcation with regard to the mesonephros and the dorsal body wall is of considerable importance to the topographical relations of the veins in this region. The original postcardinal vein lies dorsal to the umbilical artery. The migration of the bifurcation aortae craniad results in the fact of a considerable part of the mesonephros arriving in a position ventral to the umbilical artery. As it is clear that a vein dorsal to the artery (the postcardinal vein) cannot drain an organ that lies in a position ventral to the artery, a special vein arises from the postcardinal vein, draining the caudal part of the mesonephros. This branch of the postcardinal vein lies at the dorsal side of the mesonephros and opens into the postcardinal vein just cranial to the level of the aortic bifurcation. It may be concluded that the change in position of the mesonephros has caused a new vein to develop as an off-spring of the postcardinal vein. Both veins, the dorsal mesonephric branch and the original postcardinal vein, surround the umbilical artery more or less. Above the level of this artery the postcardinal vein (in embryos up to 18.5 mm) is still the only vein present in the dorsal body wall, though in the meantime (from a stage of 6 mm) a new mesonephric vein has developed on the medial side of the WOLFFian body, that is to say the subcardinal vein. The appearance of this vein results in a change of the portal circulation of the WOLFFian body (VAN GELDEREN etc.). The new (secondary) circulation is directed mediad to the subcardinal vein, while the right subcardinal vein joins the right omphalo-mesenteric vein (see page 742). As soon as this connection appears (in the 6 mm pig embryo) the left and right subcardinal veins become linked by an anastomosis in front of the aorta, the intersubcardinal anastomosis (to be seen in all stages beginning with the 7 mm embryo). The second portal circulation of the WOLFFian body is thus made possible by the formation of a drainage to the new subcardinal vein and by the ultimate hepato-subcardinal junction. The former at first consists of "sinusoids" (LEWIS, 1904), but is very soon represented by several postcardino-subcardinal anastomoses. Cranial to the region of the intersubcardinal anastomosis the postcardinal vein remains the chief drainage system of the WOLFFian body, while caudal to this level the postcardinal vein does not drain into the heart but into the subcardinal vein as we described above. In stages older than 12 mm the postcardinal vein has undergone an important change similar to the change above described about the region of the bifurcation of the aorta. This change is brought about by the extensive growth of the mesonephros but also by the migration of the permanent kidney. This migration can be observed in our reconstructions of the 6, 11.5 and 18.5 mm stages. At first the kidney primordia are situated between the umbilical arteries far beyond the bifurcation and caudal to the WOLFFian body (5 and 6 mm embryos). Very soon this organ shifts in a lateral, dorsal and cranial direction, thereby passing the bifurcation of the aorta on its ventral side, that is to say between the caudal pole of the mesonephros and the umbilical arteries. This migration occurs simultaneously with the stretching process of the caudal part of the embryo (BROCKMANN, STARKENSTEIN) and may be regarded as the principal factor responsible for the change of the venous drainage in this region. It will be clear that the position of an organ between the postcardinal vein and the WOLFFian body prevents this body from draining into the original postcardinal vein and so the postcardinal vein above the level of the permanent kidney receives a new vein in

continuation of the dorsal mesonephric vein described in the region of the umbilical arteries. We suggest that the development of this vein is due to a process of splitting in the postcardinal vein caused by the migration of the kidney and the subsequent necessity of a new vein for the mesonephric drainage.

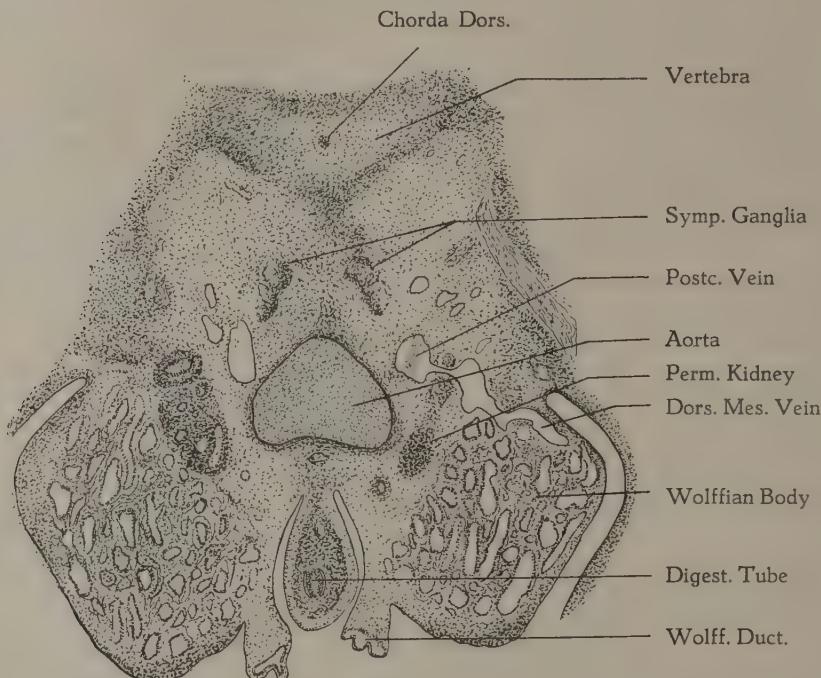


Fig. 1.

Transverse section on the level of the caudal extremity of the kidneys in a pig embryo of 18.5 mm.

The postcardinal vein is now to be found dorso-medial to the kidney but still dorso-lateral to the aorta, while the dorsal mesonephric vein lies between the kidney and the mesonephros. This process should be understood as demonstrated in Fig. 1.

This figure illustrates a transverse section through the region of the caudal extremity of the permanent kidney in the 18.5 mm pig embryo. A small communication between a vein on the dorsal side of the kidney (to our opinion the original postcardinal vein) and the dorsal mesonephric vein is still to be seen here.

The segmental and leg veins drain into the former while the mesonephros now drains via this new postcardinal off-spring. Cranial to the level of the top of the kidney the postcardinal vein remains undivided up to the 25 mm stage and thus drains the segmental veins and mesonephric tributaries.

It should be stated that up to the 18.5 mm stage the venous system shows a symmetrical plan, both sides of the body having the same veins. Only the already described anastomosis intersubcardinalis and the hepato-subcardinal junction disturb this symmetrical plan. In stages older than 18.5 mm it is to be expected that the symmetry gradually disappears as already is demonstrated in our 25 mm pig embryo, in which the right postcardinal vein in the lumbar region is far wider in caliber than the left one. On the level of the cranial pole of the permanent kidney the junction of the right postcardinal vein with the right dorsal mesonephric vein has become very distinct in comparison to the left junction. This junction is illustrated in fig. 2, which shows a transverse section through the cranial

extremity of the kidneys and also makes it clear that this junction is not a direct one but appears to be more or less a communication of the postcardinal vein with the anastomosis between the subcardinal vein and the dorsal mesonephric vein. Fig. 2 being a section of the 18.5 mm stage also gives a clear picture of the topographical relations of all veins concerned in this paper. Only the veins schematically drawn between the sympathetic ganglia do not really appear in this stage and have thus been adjusted as they do not develop until later (the 25 mm stage). This system between the ganglia and dorsal to the aorta represents the medial part of the prevertebral plexus described by miss SABIN and possibly gives rise to the azygos veins in the thoracic region, while in the lumbar region it connects the left postcardinal vein with the right postcardinal vein so as to ease the drainage of the left extremity to the right postcardinal vein. This communication between the right and left side dorsal of the aorta represents the part of the common iliac vein that lies dorsal to the bifurcation of the aorta in the adult.

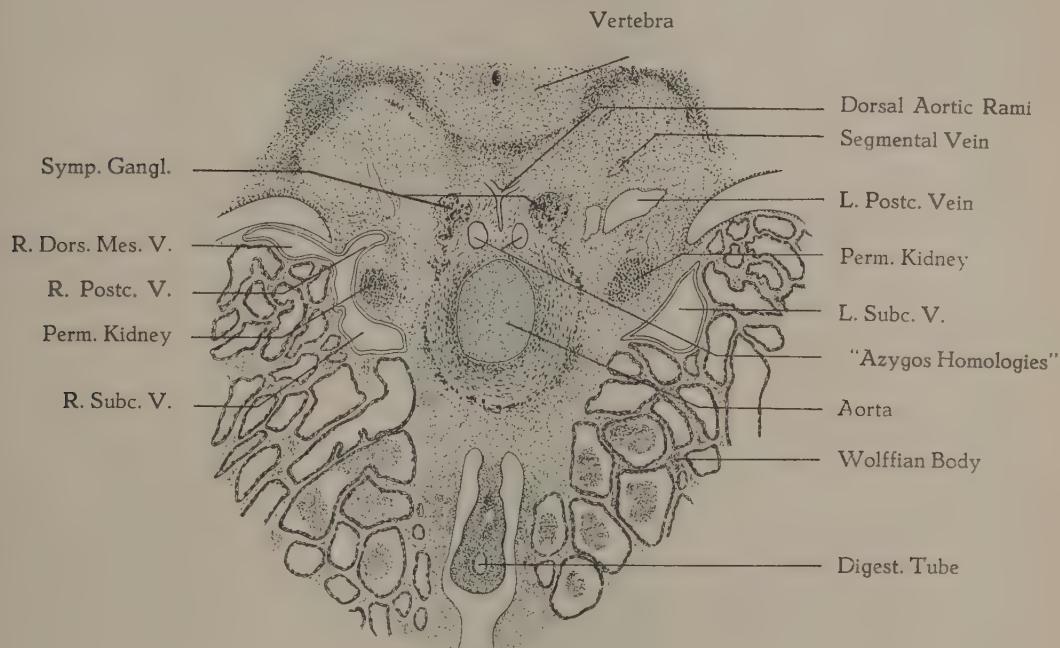


Fig. 2.

Transverse section on the level of the cranial extremity of the kidneys in a pig embryo of 18.5 mm. The azygos homologies are superposed, as they first appear in an older stage.

A further description of the prevertebral system of veins however has to be omitted especially with regard to the development of the azygos veins and their homologies. The postrenal division is thus represented by the right postcardinal vein, while the left postcardinal vein, still present in our oldest embryo of 25 mm, finally should disappear according to former researches. Only a part below the level of the above described communication via the prevertebral plexus behind the aorta persists and drains the left hind leg. If we continue the right postcardinal vein craniad, the already mentioned anastomosis postcardino-subcardinalis (see fig. 2) leads the bloodflow into the right subcardinal vein and subsequently via the hepato-subcardinal junction into the right omphalo-mesenteric vein, a vein that opens out into the heart. We may finally conclude with a description of the development of the postcardinal vein above the level in which this vein

opens into the subcardinal vein. The 25 mm stage shows that cranial to the cranial extremity of the kidney the extensive growth of the WOLFFian body also results in a separation into two veins:

1. The cranial continuation of the lumbar postcardinal vein draining the segmental veins (see the cranial part of fig. 3 lateral to the sympathetic ganglia).

2. The cranial continuation of the dorsal mesonephric vein.

At the cranial pole of the WOLFFian body these two veins of course fuse again and empty themselves as the original cranial portion of the postcardinal vein into the common cardinal vein.

We may now conclude that only the disappearance of symmetry and the subsequent hypertrophy of the venous system on the right side will change the picture in older stages. This change will not be described here, though it is of great importance as well as the further development of the prevertebral plexus, a problem that still needs further investigation *).

Our final results may best be illustrated in fig. 3, in which we tried to design all phases concerned in our observations. The figure shows schematically the elements of the inferior vena cava in a dorsal view while only the right side has been drawn.

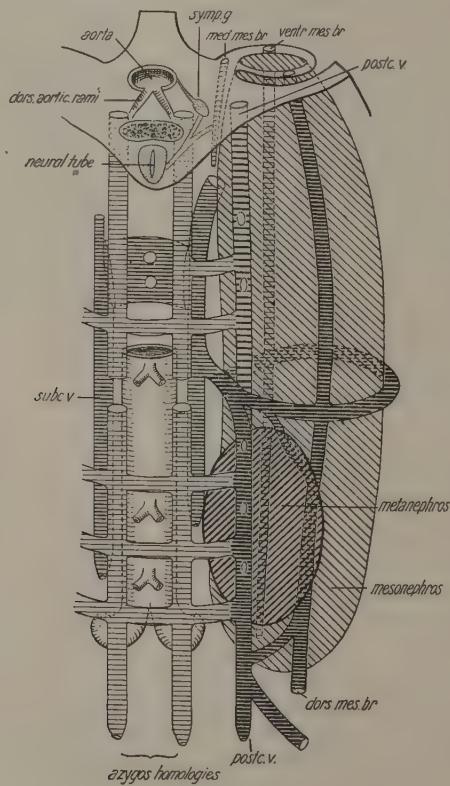


Fig. 3.

Scheme representing the 3 systems concerned (see text). At the cranial pole of the WOLFFian body an ideal transverse section illustrates the relations of all veins present.

*) A monograph on the development of all the veins concerned in this region is in progress.

The aorta is surrounded by:

1. The postcardinal vein, latero-dorsal to the aorta (thickly lined).
2. The subcardinal vein, latero-ventral to the aorta (thinly lined).
3. The prevertebral plexus (azygos homologies) dorsal to the aorta (thinnest lined).

The three systems develop in succession while our 25 mm stage shows all three. The metanephros is shown in our picture, situated between the postcardinal vein and the dorsal mesonephric vein. The segmental veins discharging into this postcardinal vein are represented by small foramina. Separated by the transverse communications in the prevertebral plexus (azygos homologies) the dorsal rami of the aorta have been drawn, while the transverse communications between the azygos homologies and the postcardinal vein separate the sympathetic ganglia and their rami (see the ideal section in fig. 3). The WOLFFian body is surrounded by a system of longitudinal channels of which only the dorsal mesonephric branch is of importance with regard to our researches. These channels are connected in transverse directions, connections that form venous rings around the WOLFFian body. One of these rings has been drawn in order to show these relations.

If we finally summarize our conclusions it may be stated that our results as far as the postrenal vena cava is concerned are more or less identical with those of HOCHSTETTER. Perhaps the „Urnierenvene” of HOCHSTETTER is the same vein as our dorsal mesonephric branch, though he really differs from opinion about the development of this „Urnierenvene” of which we take into account the above described process of splitting in the postcardinal vein. We do not find any reason to suppose the presence of a sacrocardinal vein as a special lumbar vein like GRUENWALD concluded.

As far as the "American opinion" is concerned we arrive at the conclusion that a *supracardinal* system as such does not exist, as this system merely represents the original postcardinal system that has got a special dorsal mesonephric branch.

LITERATURE CITED.

AREY, L. B.: A text-book and lab. manual of embryology (1937); BROCKMANN, A. W.: Morph. Jahrb., **77**, 605 (1936); BROCKMANN, A. W.: Morph. Jahrb., **81**, 21 (1938); BROMAN, I.: Anat. Anz., **86**, 195 (1938); BUTLER, E. G.: Amer. Journ. of Anat., **39**, 267 (1927); DANKMEIJER, J.: Anat. Anz., **89**, 81 (1939); GELDEREN, CHR. V.: Over de ontwikkeling van nierpoort-adersystemen bij Amphibiën, Reptiliën en Vogels, Amsterdam 1925; GELDEREN, CHR. V.: Anat. Anz., **63**, 49 (1927); GRUENWALD, P.: Zeitschr. f. mikrosk. anat. Forsch., **43**, 275 (1938); HOCHSTETTER, F.: Morph. Jahrb., **20**, 543 (1893); LEWIS, F. T.: Amer. Journ. of Anat., **1**, 229 (1902); LEWIS, F. T.: Anat. Anz., **25**, 261 (1904); MC CLURE, CH. F. W.: The Amer. Naturalist, **34**, 185 (1900); MC CLURE, CH. F. W.: Biol. Bulletin, **2**, 333, (1901); MC CLURE, CH. F. W.: Amer. Journ. of Anat., **2**, 371 (1903); MC CLURE, CH. F. W.: Amer. Journ. of Anat., **6**, 163 (1906); MC CLURE, CH. F. W. and BUTLER, E. G.: Amer. Journ. of Anat., **35**, 331 (1925); MC CLURE, CH. F. W. and HUNTINGTON, G. S.: Anat. Rec., **6**, 33 (1907); MC CLURE, CH. F. W. and HUNTINGTON, G. S.: Anat. Rec., **20**, 1 (1920); PARKER, G. H. and TOZIER, C. H.: Bull. of mus. of Comp. Zool. Harv. Univ., **31**, 133 (1897); RAVN, E.: Arch. f. Anat. und Phys., **124** (1889); REAGAN, F. P.: Anat. Rec., **17**, 111 (1919); REAGAN, F. P.: Anat. Record, **35**, 129 (1927); REAGAN, F. P. and TRIBE, M. E.: Proc. Anat. Soc. of Gr. Britain and Ireland (1927); SABIN, F. L.: Anat. Rec., **8**, 82 (1914); SABIN, F. L.: Contrib. to Embryol., **3**, 5 (1915); STARKENSTEIN, W.: Morph. Jahrb., **81**, 8 (1938); ZUMSTEIN, J.: Anat. Hefte **6**, 571 (1896).

Physiology. — *Do hormonal interrelation exist between thyroid gland, uterus, gonads and hypophysis, in connection with the cyclic changes in the rat.* By J. H. GAARENSTROOM, W. SCHRAFFORDT KOOPS and L. A. M. STOLTE. (From the pharmacological department, University of Leiden, Holland. Director: Prof. S. E. DE JONGH.) (Communicated by Prof. J. VAN DER HOEVE.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

GRUMBRECHT and LOESER communicated a series of experiments and forwarded a new vision upon the cyclic mechanism in the female rat, based upon certain remarkable findings they had been able to discern. In short their theory comprises the following scheme: Oestrogenic substances, as produced by the ovary, stimulate the function of the thyroid, they seem to acquire this property only after passage (by way of the tubes) through the uterus. It has been shown also, that thyroxine and the colloid substance of the thyroid raise the sensitiveness of the ovary so that the function of corpora lutea in answer to a pituitary gonadotropic stimulus is enhanced. Hence the authors concluded that uterus and thyroid gland play a part in the hormonal regulation of the (menstrual) cycle.

GRUMBRECHT and LOESER's conclusions seemed to us to be of so outstanding importance, that confirmation and eventually further broadening of the problem, was desirable.

A. We first repeated the basal experiment: If in any way the hormones of the ovary cannot reach the thyroid gland via the uterus, the result must be a lower thyroid activity. Therefore the effects of castration, uterus extirpation and tubal ligation on this activity, were investigated.

B. Subsequently we intended to show that grafting of an ovary in the uterus raises the activity of the thyroid, since by this operation the oestrogenic substance produced by the ovary has an outstanding opportunity to act on the uterus and thus on the thyroid too.

C. Next it was investigated whether a combination of gonadotropic substance and thyroxine had a stronger stimulating influence upon the ovary (formation of corpora lutea etc.) than the first substance, administered alone. Since the extracts from pituitary substance often contain thyrotropic hormone, the gonadotropic hormone, used in our experiments, was prepared of pregnant mare serum. GRUMBRECHT and LOESER investigated this part of their problem only with immature non-hypophysectomized rats. A confirmation with hypophysectomized rats seemed necessary to us.

D. Besides, experiments were made to see whether the new property (of stimulating the thyroid), that oestrogens should acquire on their way through the uterus, result from the conversion of oestrone into oestriol. This would be in accordance with the observation of PINCUS, who has found that in the uterus such a conversion actually may occur.

E. Our final purpose was to find out whether the experiments of GRUMBRECHT and LOESER have some parallelism in the male. As the seminal vesicle, at least in a hormonal sense, may be considered as the analogon of the uterus, we investigated whether the extirpation of the seminal vesicles resulted in thyroid changes comparable with those occurring after the removal of the uterus.

Description of the experiments:

A. A comparison was made of the histological aspects of various rat thyroids: 4 after hysterectomy, 3 after castration, and 3 after sham operation. Autopsy was performed three weeks after the operation. In all rats (192—216 g) the existence of a normal cycle had been controlled for the two weeks preceding the autopsy. In both the first and the last group one animal was found in which the signs of a normal oestrus cycle had disappeared. The degree of activity of the thyroid gland was judged by histological examination. No distinct differences between the various thyroid glands were observed.

In order to avoid mistakes, originating from a two long or too short interval between operation and autopsy, we repeated the experiments with four groups of rats in which the tubes were ligated and which were sacrificed 2, 3, 5 or 9 weeks after operation. In all cases the ovarian capsule was distinctly swollen as a sign that the normal drain off through the tubes no longer occurred. In spite of this interrupted passage between ovary and uterus, not a single animal from all the four groups showed the least sign of thyroid inactivation.

B. In six adult rats the ovaries were removed or the tubes ligated and subsequently an ovary was grafted in the uterus of three of the animals. This operation was preceded by a treatment with 50 γ oestrone daily, for 14 days, in order to give the graft a better chance. At autopsy, three weeks after operation, no differences between the thyroid glands of the two groups were found. Still, in view of the histological aspect of the grafted ovary, a production of oestrogenic substance was not improbable in at least two of the three animals.

C. Three groups of immature hypophysectomized rats were treated twice daily, for 4 days, with different doses of pregnant mare serum. The total dosage given during the 4 days-period were 10 I.U., 30 I.U. and 60 I.U. Autopsy was performed two or three days after cessation of the treatment. Only the rats receiving the highest dosage, gave a positive response, i.e. oestrus, marked increase of the ovarian weight and formation of large follicles and corpora lutea (viz. table). In a fourth group, injected with 30 I.U. of pregnant mare serum and 200 γ thyroxine simultaneously (50 γ thyroxine daily), no increase of the effect of the mare serum could be obtained. A fifth group of rats, which received mare serum + 400 γ thyroxine, died before the ending of the experiment.

D. Two groups of 4 rats (208–303 g) were spayed and treated respectively with 20 γ oestrone and 20 γ oestriol daily, for three weeks. Two other rats received only the solvens (olive oil). No histological differences between the thyroids of the animals in the three groups existed.

E. The histological pictures of the thyroids of three groups of adult male rats (weight 176–294 g): five rats after extirpation of the seminal vesicles, five after castration and five after shamlaparotomy, were compared. This examination, performed three weeks, after the operation, revealed no differences between the thyroid of the three groups.

The experiments were discontinued, because of all the hitherto negative results.

Summary.

GRUMBRÉCHT and LOESER claim that the thyroid activity is increased by oestrone (which, for this effect first has to pass the uterus) and that this increased activity of the thyroid raises the sensitiveness of the ovary to gonadotropic stimulation. In several experiments we did not succeed in confirming this theory.

Number of rats	Weight av.	Total dose	Number with oestrus	Ovary weight		Uterus weight av.	Number with corpora lutea
				extr. val.	av.		
8	65	10 I. U. gestyl *)	0	6½—11	8	25	0
7	66	30 "	0	12—18	14	43	0
7	63	60 "	7	55—169	64	209	7
6	61	30 I. U. gestyl + 50 γ thyroxine	0	9—14	12	22	0

*) Pregnant mare serum, kindly supplied by N.V. Organon.

P. GRUMBRÉCHT and A. LOESER, Arch. f. exper. Path. u. Pharmac. 189, 345 (1938); 192, 202 (1939); G. PINCUS, Cold Spring Harbor Symposion, V, 44, 1937.

Comparative Physiology. — *Das Vorkommen einer Gallensäure (Taurocholsäure) im Verdauungssaft des Flusskrebses (*Potamobius leptodactylus*) und ihre Bedeutung für die Fettresorption.* Von H. J. VONK. (Aus dem Laboratorium für vergleichende Physiologie der Universität Utrecht.) (Communicated by Prof. H. J. JORDAN.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

Es war mir früher schon aufgefallen, dass in der Literatur für die Verdauungssäfte einiger Invertebraten eine sehr niedrige Oberflächenspannung angegeben wird. Da nun die geringe Oberflächenspannung, welche die bei den Vertebraten vorhandenen Gallensäuren zeigen, sicher im Zusammenhang steht mit ihrer lösenden Wirkung auf Fettsäuren¹⁾ fragte ich mich damals, ob nicht auch der „Magensaft“ des Flusskrebses solche hydro-tropen²⁾ Eigenschaften haben könnte. Diese Vermutung traf zu: der Saft von Flusskrebsen, die während einiger Wochen gehungert hatten, war imstande kleine Mengen Fettsäure und sogar Milchtropfen klar zu lösen³⁾. Der Effekt auf Fettsäuren war etwa zehn Mal geringer als der von Galle. Auch die Verdauungssäfte vieler anderer Tiere (Arten von Homarus, Carcinus, Helix, Holothuria, Aplysia) zeigten die lösende Wirkung auf Ölsäure, jedoch in geringerem Masse. Deshalb wurde der Saft des Flusskrebses zuerst für die Aufklärung der Natur des hydro-tropen Stoffes gewählt⁴⁾.

Man kann sich aber nur eine geringe Menge des Saftes zur Untersuchung verschaffen, denn maximal erhält man 0.5 cm^3 pro Tier. Wenn man in dieser Flüssigkeitsmenge (ich verfügte über 50 cm^3) die Art des hydro-tropen Stoffes ausfindig machen will, braucht man natürlich einer gewissen Arbeitshypothese, da sehr viele Stoffe hydro-trope Eigenschaften haben. Diese Arbeitshypothese ergab sich mir durch folgende Ueberlegung. Bei allem überwältigenden Formreichtum des Tierreiches ist die Zahl der bekannten organischen Stoffe, welche im Tierleben eine Rolle spielen, verhältnismässig gering. Wenigstens ist das der Fall, wenn wir absehen von den feineren Nuancierungen in der Zusammensetzung der Eiweissstoffe, welche allerdings für Invertebraten noch wenig erforscht sind. Die Kohlenhydrate, die Aminosäuren, die Fettsäuren, die Exkretionsprodukte und sogar die Fermente zeigen bei Vertebraten und Invertebraten eine grosse Uebereinstimmung. Es schien mir deshalb sehr wahrscheinlich, dass die Stoffe, welche bei Invertebraten eine hydro-trope Wirkung auf Fettsäuren haben, in der Gruppe der Gallensäuren zu suchen seien. Allerdings war es ein gewisses Wagnis sich von dieser Hypothese leiten zu lassen. Denn das Vorkommen von Gallensäuren bei Invertebraten, welches etwa 1850 auf Grund vollkommen fehlerhafter Experimente behauptet worden war, wurde von allen späteren Autoren hartnäckig verneint.

Methodisches. Es wurden vier Reaktionen zur Identifizierung von Cholaten verwendet, nämlich die PETTENKOFERSche (mit starker Schwefelsäure und einem Tropfen 10%-iger Saccharose), die von JOLLES⁵⁾ mit starker Salzsäure oder Schwefelsäure und einem

¹⁾ Besonders wenn man sich die Fettsäurelösungen als kolloidal vorstellt tritt diese Bedeutung klar hervor. Durch ihre Adsorbierbarkeit (welche mit der Oberflächenspannung zusammenhängt) können die Gallensäuren dann die Fettteilchen negativ aufladen und so eine der Existenzbedingungen der kolloidalen Lösung herbeiführen.

²⁾ Die Bezeichnung „Hydro-tropie“ wurde von NEUBERG (Bioch. Zs. **76**, 1916) für die Beeinflussung der Wasserlöslichkeit eines Stoffes durch einen anderen eingeführt.

³⁾ H. J. VONK, Zs. vergl. Physiol. **21**, 717 (1935).

⁴⁾ Vom Flusskrebs kann man auch relativ zu seiner Grösse die grössten Mengen Saft erhalten. Von Meerestieren erhält man meistens weit weniger.

⁵⁾ Zs. physiol. Chem. **57**, 30 (1908). Die übrigen Reaktionen bei HOPPE-SEYLER/THIERFELDER, Hndb. d. physiol. u. pathol. chemischen Analyse, 9te Aufl. Berlin 1924 und zwar S. 336, 337.

Tropfen 5% Rhamnose¹), die Fluoreszenzreaktion mit Schwefelsäure und die Niederschlagsreaktion mit Eiweiss²). Von diesen Reaktionen ist die von PETTENKOFER die bekannteste. Sie ist aber wenig spezifisch, sie wird u.a. auch von Oelsäure, Cholesterin, sogar von Eiweiss gegeben. Reine Desoxycholsäure zeigt sie nicht. Die Reaktion von JOLLES ist weit spezifischer, besonders wenn sie mit Salzsäure ausgeführt wird. Nur Cholsäure selbst und ihre Verbindungen mit Glykokoll und Taurin zeigen diese Reaktion. Desoxycholsäure (welche in der Galle bestimmter Tierarten vorherrscht) gibt sie nicht.

Die Fluoreszenzreaktion mit Schwefelsäure wird von Desoxycholsäure nach MINIBECK mit viermal, nach JOSEPHSON³) mit zehnmal geringerer Intensität gegeben wie von Cholsäure. Oelsäure zeigt sie nur in sehr geringem Ausmass. Stark zeigt sie Cholesterin. MINIBECK⁴) hat aber eine Methode ausgearbeitet wobei aus kleinen Stoffmengen das Cholesterin vollständig entfernt wird. Auch verwendet er eine Mischung von 9 Tln. H_2SO_4 und 1 Tl. Eisessig, welche spezifischer wirken soll als Schwefelsäure allein.

Weniger verwendet wird die Niederschlagsreaktion mit Eiweiss, welche nur von Taurocholsäure und nicht von Glykocholsäure gezeigt wird. Sie ist schon längst bekannt und wird in manchen Handbüchern erwähnt, ohne dass aber genaue Vorschriften gegeben werden. Ich fand, dass die Reaktion mit Serum auftritt zwischen pH etwa 3.5 und 5 (gemessen nach Mischung aller Komponenten; als Puffer wurde Glykokoll-Salzsäure verwendet). Bessere Resultate erhielt ich bei Verwendung von Pepton Witte. Die Reaktion ist dann sehr gut sichtbar von pH 2 bis zu pH 5⁵). Da dieses als Reagenz auch leichter zu beschaffen ist als Serum, verdient es den Vorzug. Spezifisch ist diese Reaktion auch nicht. Doch kommen die anderen Stoffe, welche mit Eiweiss Niederschläge bilden, als Komponenten eines Darminhaltes wohl kaum in Betracht. Auch zeigen sie nicht die genannten Farbreaktionen und haben teilweise eine andere Löslichkeit. Ueberdies ist es ein grosser Vorteil, dass die Reaktion nicht auftritt bei Fettsäuren, welche die PETTENKOFER-sche Reaktion geben.

Die geringe Spezifität der angeführten Reaktionen macht jedoch besondere Vorsicht erwünscht. Auf zweierlei Weise kann man versuchen sich vor Fehlschlägen zu behüten. Erstens kann man versuchen die Komponenten des Darminhaltes so weit wie möglich von einander zu trennen und eventuelle Gallensäuren zu isolieren. Bei der kleinen Menge des Materials ist dieser Weg sehr schwierig. Zweitens kann man versuchen die Mengen der begleitenden Stoffen zu bestimmen, welche, auf Grund ihrer Reaktionen, mit Gallensäuren verwechselt werden können. Ich habe beide Methoden gleichzeitig verwendet. Zur Trennung benutzte ich ein Verfahren nach DOUGLAS SAUERMANN⁶), das sich für kleine Mengen am besten eignet.

Den ursprünglichen Saft nennen wir A. Eiweiss wird durch Kochen mit Alkohol entfernt. Das alkoholische Filtrat (B) wird nach Ansäuern und Verdünnen mit Wasser bis zu leichter Trübung mit Xylol extrahiert (Xyloextrakt = C). Die derart von Lipoiden befreite Flüssigkeit (D) wird nach Verdampfung des Alkohols alkalisch gemacht und während einiger Stunden schwach gekocht zur Spaltung von eventuellen gepaarten Gallensäuren. Die entstandenen ungepaarten Gallensäuren können dann nach Ansäuern mit Aether extrahiert werden. Der Aether (Extrakt E) wird mit Natriumsulfat getrocknet, filtriert und darauf verdampft. Mit dem Rückstande können die verschiedenen Reaktionen vorgenommen werden. Für die Reaktion nach MINIBECK ist noch eine weitere Behandlung nötig.

¹⁾ Der zu untersuchende Stoff wird dabei in Alkohol gelöst.

²⁾ Ueber die Reaktion von Taurocholsäure mit Eiweiss: I. BANG, Beitr. z. chem. Physiol. u. Pathol. (HOFMEISTERS Beitr.) 7, 148 (1906).

³⁾ B. JOSEPHSON und G. JUNGNER, Biochem. Jl. 30, 1953 (1936).

⁴⁾ H. MINIBECK, Biochem. Zs. 297, 24 (1938).

⁵⁾ Ueber diese Resultate wird an anderer Stelle berichtet.

⁶⁾ A. GRAF DOUGLAS SAUERMANN, Zs. physiol. Chem. 231, 92 (1935).

Die Niederschlagsreaktion von eventueller Taurocholsäure mit Eiweiss wird nur von der gepaarten Säure gegeben. Für diese muss also der erste Alkoholextrakt (B) verwendet werden (nach Verdampfung des Alkohols und Lösen des Niederschlags in Wasser)

Versuche. Die letztgenannte Reaktion wird als die einfachste zuerst beschrieben. Eine Menge des Alkoholextraktes B, welche mit 2 cm³ ursprünglichen Saftes übereinstimmt, wurde trocken gedampft. Der Rückstand (46.8 mg) wurde in 2 cm³ Glykokollpuffer von pH 3.40 gelöst. Die Lösung war vollkommen klar und zeigte besonders keine Fettröpfchen. Zu dieser Lösung wurde 1 cm³ einer klarfiltrierten 3-%-igen Peptonlösung zugesetzt, worauf ein dicker Niederschlag entstand. Nach diesem Zusatz war der pH 4.20. Nach Abzentrifugieren, Auswaschen mit Alkohol, wiederholtem Zentrifugieren und trocknen zeigte dieser Niederschlag Xanthoprotein- und MILLON's Reaktion, zum Beweise, dass wirklich Eiweiss gefällt wurde. Die Trübung war so stark, wie sie etwa mit einer 1-%-igen Taurocholatlösung erhalten wurde. Diese Menge stimmt überein mit 0.5 % auf den ursprünglichen Saft. Diese Reaktion war besonders schlagend. Sie war weit stärker als die später zu erwähnenden Reaktionen auf Cholsäure. Das würde darauf hinweisen, dass noch eine andere gepaarte Gallensäure (vermutlich Taurodesoxycholsäure), welche keine Farbreaktionen zeigt, vorhanden sein kann. Denn es ist höchstwahrscheinlich, dass auch diese (obwohl ich sie daraufhin aus Mangel an diesem Präparat noch nicht untersuchen konnte) eine derartige Reaktion zeigen wird.

Eine andere Tatsache, welche leicht zu untersuchen war, war der Geschmack vom Rückstand des Alkoholextraktes B. Hierzu wurden 3 ccm Extrakt verdampft, das Residuum (11.7 mg) in 0.5 cm³ Wasser gelöst und Tropfen dieser Lösung auf der Zunge gebracht bei drei verschiedenen Personen. Alle drei stimmten darin unabhängig voneinander überein, dass die Lösung einen bitteren Nachgeschmack hatte. Einer schmeckte anfänglich nichts, die beiden anderen stellten anfänglich einen schwach sauren und daneben einen etwas süßen Geschmack fest. Auch das ist in Uebereinstimmung mit der Anwesenheit von Taurocholsäure¹⁾.

Der Versuch zur Reinigung etwaiger Gallensäuren und Bestimmung der Begleitstoffe

TABELLE.

Trockenrückstand der Fraktionen B-E, berechnet auf 1 cm³ des ursprünglichen Saftes (A).

B. Alkoholextrakt	26.8 mg		
Stickstoff in Extrakt B			1.0 mg
Zucker in Extrakt B (berechnet als Glukose)			1.7 mg
(Gepaarte Gallensäure geschätzt nach Fällungsreaktion mit Eiweiss)			5.0 mg
C. Xylolextrakt		1.0 mg	
Aetherextrakt nach Extraktion mit Xylol			0.66 mg
Cholesterin aus Extrakt C			0.06 mg
D. Extrakt B nach Extraktion mit Xylol	22.2 mg		
E. Aetherextrakt aus D nach Kochen von D mit Lauge			5.7 mg
	26.8 mg (Extrakt B)	23.2 mg (Summe der Fraktionen)	

1) Der süßliche Geschmack kann aber von einer kleinen Zuckermenge herühren.

verlief folgendermassen. Der Saft (A) von etwa 100 Tieren (50 cm^3), welche während 1 Woche hungernten, wurde mit 200 cm^3 96 %-igen Alkohol praezipitiert und weiter nach DOUGLAS SAUERMANN verarbeitet. Zuerst wurde von den verschiedenen Extrakten B bis E an kleinen Mengen das Trockengewicht bestimmt. Vom Extrakt C wurde der grösste Teil benutzt zur Bestimmung des Cholesterins mit Digitonin. In D wurde der Stickstoff und das reduzierende Vermögen bestimmt. Die gefundenen Mengen wurden umgerechnet auf 1 cm^3 ursprünglichen Saft (Siehe Tabelle S. 754).

Hieraus ergibt sich, dass nur wenig Lipoide und Zucker im Alkoholextrakt vorhanden sind. Täuschungen durch Lipoide sind deshalb nicht sehr zu befürchten, auch wenn diese Stoffe nicht ganz entfernt werden sollten.

Glukose ist zu ca. 2 % in abs. Alkohol löslich. In dem Extrakt B könnten also total rund 2500 mg vorhanden sein, während total nur 69.2 mg gefunden wurde. Sehr gering ist der Gehalt an Cholesterin (oder andere mit Digitonin fällbare Sterine). Ziemlich beträchtlich ist der N-Gehalt. Aminosäuren sind in absolutem Alkohol fast unlöslich. Wahrscheinlich röhrt ein Teil des Stickstoffs wohl vom braunen Pigment her, das teilweise vom Alkohol mitextrahiert wird. Ziemlich beträchtlich ist die Stoffmenge im Extrakt E, auch wenn man von ihr die Menge abzieht welche nach der Xylolextaktion noch mit Aether entfernt werden konnte. Die Menge des Extraktes E (welche die abgespaltenen ungepaarten Gallensäuren enthalten müsste) ist dann rund $\frac{1}{5}$ der total mit Alkohol extrahierbaren Stoffe. Dieser Rückstand ist aber (auch wenn der Aether in der Kälte abgeblasen wird) noch braun. Ein Teil des Pigments oder seiner Spaltprodukte gelangt wahrscheinlich in die Fraktion E. Das Pigment scheint sich bei unseren Manipulationen über die verschiedenen Fraktionen zu verteilen. Keine dieser Fraktionen war ungefärbt. Ueber die Natur dieses Pigments ist wenig positives bekannt.

Mit den Rückständen von kleinen Portionen der Fraktion E (welche vorher mit ausgeglühtem Natriumsulfat getrocknet wurde) wurden nun die im Anfang erwähnten Reaktionen auf Gallensäuren angestellt. In total stand von dieser Fraktion zur Verfügung 200 cm^3 , übereinstimmend mit 30 cm^3 frischen Saft.

Wegen Platzmangels kann die Ausführungsart dieser Reaktionen nicht ausführlich beschrieben werden. Es muss erwähnt werden, dass mit diesen Reaktionen viele Kontrollversuche auf Gallensäuren und besonders auf andere Stoffe angestellt wurden. Die Mengen Residuum des Extraktes E welche verwendet wurden, schwankten zwischen 1.5 und 5 mg. Sie wurden in Wasser oder in Alkohol gelöst (die Fluoreszenzreaktion wurde mit dem ungelösten Residuum angestellt). Sowohl die Reaktionen nach PETTENKOFER und JOLLES als die Fluoreszenzreaktion waren positiv. Sie waren schwach, so dass nur ein kleiner Teil des Residuums aus Cholsäure bestanden haben kann. Die begleitenden Stoffe sind wahrscheinlich Spaltungsprodukte des Pigments, welche beim Kochen mit Lauge entstanden sein mögen, und ein Teil des Pigments selbst. Auch können noch sehr kleine Mengen Lipoide vorhanden gewesen sein, da bei Gegenwart von Gallensäuren die Abtrennung der Lipoide niemals völlig gelingt. Es wurde nun noch versucht weiter zu reinigen nach dem Verfahren von MINIBECK¹⁾. Dabei wird das in Alkohol gelöste Residuum des Extraktes nach JOSEPHSON¹⁾ mit Bariumhydroxyd und mit Bariumazetat entfärbt. Ein grosser Teil ($120 \text{ cm}^3 = 18 \text{ cm}^3$ frischer Saft) des Extraktes E wurde hierzu verwendet. Schliesslich erhält man eventuelle Gallensäuren adsorbiert an einen Niederschlag von CaO. Dieser wurde in 10 cm^3 N Salzsäure gelöst und $5 \times$ mit kleinen Mengen Aether extrahiert, der Aether getrocknet und verdampft. Aus je 51.6 mg Residuum von E erhielt ich so in zwei Versuchen 11 und 8 mg. Die 8 mg in 3 cm^3 Alkohol gelöst, zeigen sehr schön die Reaktion nach JOLLES, aber nicht stärker als 1 mg Cholsäure sie zeigt.

Die 11 mg wurden in 0.5 cm^3 Alkohol gelöst. Es gelang nicht mit einigen Tropfen hiervom die Reaktion von MYLIUS (mit $\frac{N}{10}$ Jod) auf Cholsäure zu erhalten. Dies ist

¹⁾ MINIBECK I.c. B. JOSEPHSON, Biochem. Jl. 29, 1519 (1935).

erklärlich, weil nach dem vorigen Versuch nur 1/8 des Endresiduums aus Cholsäure besteht. Ebensowenig zeigt ein wenig des Residuums, in H_2SO_4 gelöst, das spezifische Absorptionsband bei 2900 Å welches nach BANDOW¹⁾ für Cholsäure charakteristisch ist. Dieser Band kann aber leicht durch die Absorption von Verunreinigungen überdeckt werden.

Diskussion. Die Argumente, welche für das Vorhandensein von Taurocholsäure in der Verdauungsflüssigkeit des Flusskrebses sprechen, sind folgende. Nach ziemlich weitgehender Reinigung zeigt der Stoff die Reaktionen von PETTENKOFER, JOLLES und die Fluoreszenzreaktion, welche alle der Cholsäure zukommen. Diese Reaktionen sind um so deutlicher, je weitergehend gereinigt wurde. Die Löslichkeit des hydrotropen Stoffes (Wasser +, Alkohol +, Aether —) stimmt überein mit der von Taurocholsäure. Der Rückstand des Alkoholextraktes aus dem Verdauungssaft, welcher bei pH 4 in Wasser gelöst wurde, fällt eine Eiweißlösung. Diese Befunde deuten auf Taurocholsäure und nicht auf Glykocholsäure hin, da letztere Säure beim pH des Krebssafes (5.0—5.3) kaum löslich ist und keine Fällung mit Eiweiß zeigt. Ueberdies hat die wässrige Lösung vom Rückstand des Alkoholextraktes einen schwach bitteren Geschmack. Die Möglichkeit besteht, dass neben der Taurocholsäure Taurodesoxycholsäure vorkommt, welche ebenfalls wasserlöslich ist. Das Fehlen der Reaktionen nach MYLIUS und BANDOW, zusammen mit der starken Reaktion auf Eiweiß würde darauf hindeuten können und es könnte sogar sein, dass die Taurodesoxycholsäure im Saft in grösserer Menge vorhanden wäre als die Taurocholsäure. Die gefundenen Anweisungen liefern nach meiner Meinung genügende Gründe zu der Schlussfolgerung, dass wenigstens Taurocholsäure im Saft vorkommt. Die Gesamtmenge an gepaarten Gallensäuren im Verdauungssaft des Flusskrebses wurde auf 0.5 % geschätzt.

Frage man sich, warum es so lange gedauert hat, ehe diese doch nicht so unbedeutende Menge Gallensäure nachgewiesen werden konnte, so muss die Antwort lauten: weil man nicht in der richtigen Weise danach gesucht hat. Anfangs wusste man von der Vertebratengalle weiter nichts, als dass sie eine von der Leber abgesonderte gelbgrüne fettemulgierende Flüssigkeit ist. Da auch der Darmsaft der Invertebraten Fett emulgierte, nahm man an, dass auch die Verdauungsdrüsen der Invertebraten Galle absonderten. Nachdem die Gallensäuren entdeckt worden waren, versuchte man diese auch bei Invertebraten nachzuweisen aber merkwürdigerweise untersuchte man dazu fast immer die sogenannte Leber (jetzt Mitteldarmdrüse genannt). Nun enthält aber auch die Vertebratenleber fast keine Gallensäuren (sonst wäre Leber als Nahrungsmittel ungenießbar). WILL meinte (1848) mit der PETTENKOFRÉSchen Reaktion überall Gallensäuren bei Invertebraten nachgewiesen zu haben, aber VOIT zeigte dass dieses darauf beruhte, dass auch Eiweiß die Reaktion nach PETTENKOFER ergab. Die späteren Untersucher, welche keine Gallensäuren fanden, haben auch fast ausschliesslich Extrakte der Mitteldarmdrüse benutzt.

Trotz des Vorkommens von Gallensäure wird man auch jetzt nicht mehr von einer „Galle“ bei Invertebraten sprechen können. Zusammen mit der Gallensäure werden beim Flusskrebs von der Mitteldarmdrüse alle Verdauungsfermente abgesondert und es fehlen die typischen Gallenfarbstoffe, weil diese Zerfallsprodukte des Hämoglobins sind, welches die Krebsen nicht besitzen. Ebensowenig wird man darum auch die Mitteldarmdrüse wieder (wie das früher geschah) Leber nennen können.

Es ist aber eine wichtige Tatsache, dass die Gallensäuren, welche bei Vertebraten einer der Hauptbestandteile der Galle bilden, nun auch bei einem Invertebraten nachgewiesen wurden. Es war bis jetzt auffallend, dass in der Evolution bei den Vertebraten so plötzlich die Galle mit ihrer wichtigen Funktion bei der Fettresorption auftritt, ohne dass man bei Invertebraten irgendeine Andeutung der in der Galle vorkommenden Stoffe und ihrer Funktion hätte auffinden können. Jetzt muss man annehmen, dass die Produktion der

¹⁾ F. BANDOW, Bioch. Zs. **301**, 37 (1939). M. JENKE und F. BANDOW, Zs. physiol. Chem. **249**, 16 (1937).

die Fettverdauung und Resorption fördernden Gallensäuren bei den Wirbeltieren als höhere Differenzierung in der Leber lokalisiert wurde, in gleicher Weise, wie die bei Invertebraten „diffuse“ Produktion des Trypsins bei Vertebraten im Pankreas lokalisiert ist.

Er ist wohl nicht daran zu zweifeln, dass auch bei anderen Invertebraten Gallensäuren aufgefunden werden können und ich bin jetzt bemüht diese bei derartigen Objekten nachzuweisen. Es wird interessant sein zu untersuchen, ob das Vorkommen von Gallensäuren beschränkt sein wird auf diejenigen Tiergruppen, welche eine Mitteldarmdrüse besitzen. Wahrscheinlich wird das nicht der Fall sein, da die Produktion eines bestimmten Stoffes (wie z.B. Pepsin oder Trypsin) in spezialisierten Zellen oder Drüsen lokalisiert sein *kann* (als höhere Differenzierung), aber nicht lokalisiert zu sein braucht. Es scheint mir aber wohl wahrscheinlich, dass Tiere, welche sich noch ganz durch Phagozytose ernähren können, die Gallensäuren entbehren können. Das alles muss Gegenstand weiterer Untersuchung sein.

Comparative Physiology. — Ueber den Tonus des Schneckenfusses (*Helix pomatia L.*).

IV. *Ueber tonische Reaktionen des seines Gangliensystems beraubten Fusses; Erzeugung des Tonus, adaptive Veränderungen des Tonusspiegels und des Tonusniveaus („Netzkonstanz“).* Vorläufige Mitteilung¹⁾. Von N. POSTMA. (Aus dem Institut für vergleichende Physiologie der Universität zu Utrecht.) (Communicated by Prof. H. J. JORDAN.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

A. Einleitung.

In unserm Institut wurden bis jetzt die fundamentalen, physikochemischen Eigenschaften des viskosoiden Tonus der Schneckenmuskeln am ganglienlosen Fusse, die Regulierung des Tonus durch die Pedalganglien aber durch Vergleichung eines Fusses mit den Ganglien mit einem solchen, der seiner Ganglien beraubt worden war, untersucht. Nur bei Aplysia hatte JORDAN einige Erscheinungen gefunden, die zu Gunsten der Ansicht sprachen, dass der ganglienlose Aplysienfuss zur Erzeugung und bis zu einem gewissen Grade auch zur Regelung des Tonus imstande sei. In den zwei letzten Jahren haben wir jedoch auch am *Helix*fusse einige Resultate erzielt, die es deutlich machen, man könne sich in Zukunft, was die Erforschung der eigentlichen Dynamik des Tonus betrifft, nicht auf den Einfluss der Ganglien beschränken. Wenn diese auch die Hauptrolle bei der Regulierung der in Frage stehenden Erscheinungen spielen, so müssen wir in Zukunft mehr und mehr unsere Aufmerksamkeit auch den dynamischen Erscheinungen des Tonus am isolierten Fusse zuwenden. Dies gilt zumal für die Ersterzeugung des Tonus, den wir bei diesen Muskeln ja eigentlich nur als Dauerzustand kennen. Bei Aplysia aber war es möglich durch starke Abkühlung des Tieres (eine Nachtlang im Eisschrank) den Tonus aufzuheben, der sich unmittelbar nach Einbringen des Tieres in zimmerwarmes Aquariumwasser durch eine ausserordentlich typische tonische Kontraktion wiederherstellte. Mit Ganglien wurde das Tier wieder normal, ohne Ganglien aber schrumpfte es auf übertriebene Weise (Fehlen hemmender Regulierung durch die Pedalganglien). Gegenstand der vorliegenden Mitteilung musste daher sein, nach dynamischen regulativen Erscheinungen des Tonus an ihrer Ganglien beraubten *Helix*füssen zu forschen, in der Annahme, dass die immanen Nervennetze des Fusses ein Zentrum niederster Ordnung der Tonusfunktion seien. Wir hatten schon früher dieser Möglichkeit Rechnung getragen, dadurch, dass wir die zuweilen auftretende regulative Gleichgewichtserzeugung zwischen tonischem Widerstand und Last, die zu einem konstanten Tonusniveau führt, „Netzkonstanz“ genannt hatten. Hierbei handelt es sich also um das Vermögen des Fussmuskels, nachdem ein bestimmtes Gewicht ihn eine Weile gedehnt hat, von einer bestimmten Länge, einem „Tonusniveau“ an, das Gewicht zu tragen, ohne weiter nachzugeben. Diese Reaktion auf die passive Dehnung kommt keineswegs in allen Fällen, in denen man einen Schneckenfuss dehnt, vor. In der Regel verläuft die Dehnung kontinuierlich und langsam; sie kann dann fast unbeschränkt fortgesetzt werden. Solche Muskeln haben daher lediglich einen gleitenden Widerstand gegen Last, der sich unabhängig von der Länge behauptet, ein Widerstand, den wir „Tonusspiegel“ genannt haben und der in diesen Fällen zu niedrig ist, um mit dem dehnenden Gewicht in Gleichgewicht zu kommen.

Von Anfang an hat JORDAN den Prozess, durch welchen der Tonus erstmalig entsteht, von dem hieraus resultierenden Zustand des „Ruhetonus“ unterschieden (vergl. 2, S. 589; 3, S. 185, 223, 225; 7, S. 74; 10, S. 443). Vermutlich entsteht durch Vermittelung der

¹⁾ Mit Unterstützung der Niederl. Regierung aus den Einkünften der „Zomerpostzegels“.

Nervennetze reflektorisch eine langsame tonische Verkürzung, die nur äusserst langsam in Erschlaffung übergeht und während seines Bestehens dem Muskel einen Viskositätsgrad verleiht, durch den er imstande ist, bei einer beliebigen Länge passiver Dehnung Widerstand zu bieten. Wenn demgemäß der Tonus der sehr lange Gipfel einer besondern Verkürzungsart ist, so ist er doch praktisch als rein statisch zu betrachten, solange wenigstens keine Einflüsse irgend welcher Art auf diesen visko-elastischen Zustand einwirken. Wenn aber durch solche Einflüsse das gegebene Gleichgewicht gestört wird, treten *dynamische* Erscheinungen auf, durch welche sich die Tatsache, dass der Tonus in letzter Instanz eine Verkürzungsform ist, offenbart. Schon JORDAN fand bei Aplysia, dass der *ganglienlose* Fuss, der durch lange Kältewirkung seines Tonus völlig beraubt war, bei leichter Erwärmung seinen Tonus, durch die langsame Verkürzung wiederherzustellen vermag. Bei Helix gelingt dieser Versuch nicht, da Kälte den Tonus nicht zum Verschwinden bringt. Daher war es unsere Aufgabe, auf anderem Wege zu beweisen, dass die durch W. BIEDERMANN beschriebenen Nervennetze des Helixfusses den Tonus, dynamisch zu regeln und wahrscheinlich auch zu erzeugen imstande sind. Diese letztere Meinung ist äusserst schwer zu beweisen, da der Tonus sich während des ganzen Lebens des Tieres behauptet. Es war mir schon früher gelungen zu zeigen, dass die Höhe der dehnenden Last den tonischen Zustand eines Fussmuskels zu verändern imstande ist. Nach Exstirpation der Pedalganglien steigt im Muskel der Tonusspiegel spontan. In etwa 15 min erreicht dieser Anstieg ein neues Gleichgewicht, welches auf gleichem Niveau dem Tonusspiegel des ruhenden isolierten Muskels entspricht. Diese Steigerung dürfte als primäre Tonuserzeugung aufzufassen sein¹⁾. Dass es sich bei Erhöhung des Tonusspiegels durch *schnelle* Dehnung um eine Reaktion des ganglienlosen Fusses auf diese Dehnung selbst handelt, haben wir wahrscheinlich machen können, und zwar dadurch, dass wir diesen Anstieg durch Reizung der Pedalnerven mit schwachen faradischen Strömen haben hemmen können. Der Eintritt eines Gleichgewichtes zwischen Muskelwiderstand und Gewicht, eines Gleichgewichtes, das sich durch „Netzkonstanz“ äussert, wurde hierdurch verhindert.

B. Ergebnisse.

1. Die Netzkonstanz bei der „ersten“ Dehnung.

Wie schon in Mitt. I erwähnt, wurde die besondere Bedeutung der Netzkonstanz gegenüber der Pedalkonstanz bis 1935 (16) kaum beachtet. Das ist darauf zurückzuführen, dass es oftmals bei der Dehnung nicht zu einer Netzkonstanz kommt, da der Dehnungswiderstand eines pedallosen Fusses auf einer längeren Dehnungsstrecke konstant sein kann. Man trifft diesen Dehnungstypus öfters an, wenn der Fuss sofort nach der kurzen elastischen Dehnungsstrecke einen ziemlich grossen Widerstand zeigt, die auf Fluidität beruhende Kurvenstrecke also wenig steil ist. Das plastische Fliessen ist aber in andern Fällen (in 30 % der untersuchten Kurven) nicht konstant. Offenbar bedarf es einer schnelleren Deformierung, um im Muskel eine Zunahme des Widerstandes gegen Dehnung zu erzeugen, so dass jede weitere Dehnung unterbleibt („Netzkonstanz“). Man könnte daher geneigt sein, anzunehmen, dass wir es nicht mit reaktiver Netzkonstanz zu tun haben, sondern mit dem physikalischen Verhalten eines plastischen (visco-elastischen) Körpers, zu denen auch der glatte Muskel gehört (Schneepflugeffekt) (vergl. auch 16, S. 36, Fussnote 9). Folgende Ergebnisse zeigen aber, dass Schneepflugeffekt zur Erklärung der Erscheinung nicht in Frage kommt. Bei Anwendung der isotonischen Dehnungsmethode dauert es nämlich ziemlich lang (viel länger als bei der Konstanz, die unter dem Einfluss der Pedalganglien entsteht, der Pedalkonstanz) bis die Last konstant getragen wird.

¹⁾ Wenn der Tonusspiegel des Nervenmuskelpräparates ein ausgesprochenes Defizit zeigt, nennen wir die Wiederherstellung des Spiegels durch Tonuserzeugung (mit oder ohne Eingreifen der Pedalganglien) *regulierend*. Ein Steigen des Tonusspiegels beim Fuss ohne Ganglien, welche Steigerung kein Tonusdefizit zur Voraussetzung hat, ist als *primäre* Funktion der Peripherie aufzufassen.

*Versuchsserie G.A, 10-II-1933. 3 Exemplare von Helix pomatia von 19 g;
Belastung mit 20 g.*

Objekt I, mit Pedalganglien;	nach 8 min Dehnung tritt Pedalkonstanz auf bei 8.5 cm	Länge des Fusses.
Objekt II, ohne Ganglien;	nach 30 min Dehnung tritt Netzkonstanz auf bei 8.7 cm	Länge des Fusses.
Objekt III, mit Pedalganglien,	nach 10 min Dehnung tritt Pedalkonstanz auf bei 8.9 cm	Länge des Fusses.

In allen drei Fällen liegt die Konstanz ungefähr bei dem Werte der Spannungslänge¹⁾. Das kann darauf hinweisen, dass die Netzkonstanz nicht durch die Stauung eines Schneepflugeffektes oder durch Verfestigung zu erklären ist. Denn das Auftreten von Schneepflugeffekt ist von der Länge der Dehnungsstrecke unabhängig, während Verfestigung ausschliesslich von dieser Strecke abhängig ist und die Zeit, in welcher diese zurückgelegt wird, kaum eine Rolle hierbei spielen dürfte. Die Konstanz muss also vielmehr das Ergebniss der Dynamik des Tonus sein. Das ist bestimmt so im Falle, der nunmehr zu erörtern ist.

2. Netzkonstanz bei der Pseudowiederholungskurve und ihre Dynamik.

Nach Ablauf einer Dehnungskurve kann man den Helixfuss zu einer Wiederverkürzung veranlassen, und zwar dadurch, dass man ihn vollständig entlastet und ihn leicht reizt (12, 13, 16, 17). Hierdurch stellt sich die Ausgangslänge der ersten Dehnungskurve wieder her. Aufs Neue belastet, reagiert der Fuss durch erneute Dehnung, die gleich wie die „erste“ Kurve verläuft (die „Wiederholungskurve“). Wenn man den Fuss bei der Wiederverkürzung nicht vollkommen von allem Widerstand befreit, ihn z.B. den unbelasteten Schreibhebel bis auf dessen Ausgangsniveau heben lässt, so wird der Tonusspiegel auf dem ursprünglichen Niveau nicht vollständig wieder hergestellt (daher: „Pseudowiederholungskurve“). In diesem Zustand hat die Temperatur einen zwiefältigen Einfluss auf die folgende Dehnungskurve (13, Abb. 6): die Wiederholungskurven nach unvollkommener oder Pseudo-Wiederherstellungsreaktion werden durch die Wärme nicht bleibend herabgesetzt, wie das der Fall ist, wenn der tonische Widerstand rein viskos ist. Wenn wir die bei verschiedenen Temperaturen erhaltenen Wiederholungskurven von einem gemeinsamen Ausgangspunkt aus zeichnen, weichen sie nur im Anfang fächerförmig auseinander, sodass zunächst die Kurven, welche der Dehnung bei höheren Temperaturen entsprechen, niedriger zu liegen kommen als die anderen. An einem gewissen Punkte tritt bei grösserer Wärme (ähnlich wie wir das bei der pedaltonischen Kurve sehen) ein „Umschlag“ auf. Die Dehnungsgeschwindigkeit vermindert sich plötzlich bis auf Null, so dass die Kurve bei höherer Temperatur diejenige bei niedriger Temperatur, obwohl diese zu Anfang träger verläuft, schneidet. Je höher die Temperatur ist, desto steiler und länger ist die Anfangsstrecke, aber auch um so schärfer ist das Knie in der Kurve und um so eher, d.h. desto höher tritt es auf.

Offenbar tritt an die Stelle eines gefestigten Tonusspiegels auf dem ursprünglichen Niveau in diesen Versuchen, und zwar am Punkte des Umschlages, eine Art tonischer Spannung, d.h. eine Form des *dynamischen* Tonus. Diesen muss Wärme fördern, und, da nunmehr die statische Viskosität gegenüber der Spannung zurücktritt und jene sich erst später wiederherstellen kann, muss Wärme den Widerstand gegen Dehnung erhöhen. Wärme erzeugt daher gesteigerte Spannung, die zuweilen zu einer tonischen Verkürzung führen kann; das hat JORDAN für Aplysia (5 und 7) beweisen können, da bei diesem Objekte die Dynamik des Tonus deutlich eine ähnliche Rolle spielt, wie wir sie für Helix soeben postuliert haben.

¹⁾ Das ist die Länge des Fusses, bis zu welcher der Fuss, durch Feststecken auf einer Wachsplatte, vor der Präparation gedehnt worden war.

3. Das Niveau der Netzkonstanz bei echten Wiederholungskurven. Lösung der Netzkonstanz durch Reizung von Pedalnerven.

Als Antwort auf die Frage, welches das Niveau der Netzkonstanz ist, kann ich auf die Abb. 1 und das hierzu gehörige Protokoll verweisen.

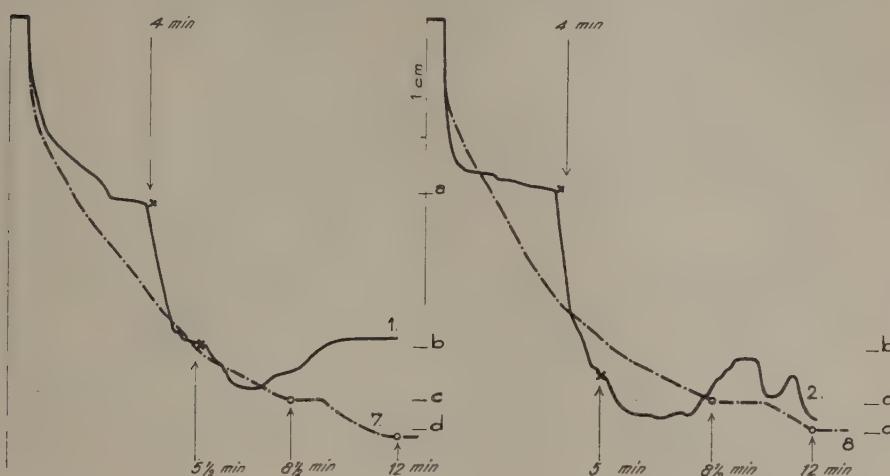


Abb. 1. Vergleichung von Niveaus der Pedalkonstanz mit denjenigen der Netzkonstanz. Wiederholungskurven: 1 und 2 mit Pedalganglien, 7 und 8 nach deren Exstirpation. Sofort fällt die Gleichförmigkeit dieser Kurvenpaare und die gemeinsamen Konstanzniveaux c und d auf, und somit die gleiche Kurvendauer bis zur Erreichung der Konstanz ($8\frac{1}{2}$ und 12 min) bezw. zur Tonuslösung (4 min). Ordinaten: effektive Längenänderung des Fusses (Ordinatenschreiber nach N. POSTMA, 1933); Abszissen: die Zeit. Genaue Erklärung im Text.

Versuchsserie CB, Schnecken von 21 g, Objekt I, 24-XI-'33. Kurven 1 und 2 zeigen Pedalkonstanz auf dem Niveau a; 4 min nach der Belastung tritt in beiden Kurven spontane Konstanzlösung auf. Kurve 1 zeigt dann $5\frac{1}{2}$ min nach Dehnungsanfang einen Moment Konstanz auf Niveau b, und dann aufs Neue auf Niveau c, um dann nach b zurückzukehren. Kurve 2 behauptet sich nach dem Verlassen von a einen Augenblick auf dem Niveau c und sinkt bis Niveau d, schwankt danach zwischen c und b, kann aber in dieser Verkürzung nicht verharren. Später wurden die Ganglien exstirpiert, und die Kurven 7 und 8 aufgenommen. Diese zeigen Netzkonstanz: $8\frac{1}{2}$ min nach Dehnungsanfang auf Niveau c, welches sie aber wieder verlassen müssen um aufs Neue auf d, 12 min nach Dehnungsanfang, zur Konstanz überzugehen.

In dem beschriebenen Falle finden wir eine auffällige Uebereinstimmung zwischen dem Verlauf von Wiederholungskurven von *Helix*-Füßen vor und nach der Exstirpation der Pedalganglien. Die Netzkonstanz liegt zwar im Ganzen niedriger als die Pedalkonstanz; allein bei diesem Fusse ohne Ganglien stimmen die beiden einzigen Niveaux c und d mit dem dritten und vierten Niveau der Pedalkonstanz überein. Entsprechendes gilt für die Füsse, bei denen bei Wiederholungskurven nach Ganglienexstirpation, Netzkonstanz auftritt. Netzkonstanz tritt auch hier nach längerem Kurvenverlauf auf, als Pedalkonstanz. Wenn man dahingegen die einzelnen Kurven mit Pedalganglien mit einander, sowie die einzelnen Kurven ohne Ganglien miteinander vergleicht, so findet man innerhalb jeder dieser beiden Gruppen gleiche Kurvendauer bis zum Eintritt der Konstanz und gleiche Niveaux.

Abb. 2 zeigt nicht nur eine derartige Uebereinstimmung der Konstanzniveaux, sondern auch von Tonuslösung durch mechanischen Reiz: *Versuchsserie CM, Schnecken von 17 1/2 g,*

Last 5 g, Objekt IX, 16-III-'34. In Wiederholungskurve 5 zeigt das pedaltonische Präparat (Fuss mit Ganglien) Tonusschwankungen, welche auf Spannungslänge anfangen; in Kurve 7 wird bei R der N. Pallialis durch einen kurzen Scherenschlag durchschnitten und dadurch gereizt und hierdurch die Pedalkonstanz aufgehoben, während nach einem Längenzuwachs von etwa 20 % sich von neuem Konstanz einstellt. Nachdem der Fuss von äusseren Widerständen ganz frei gemacht worden war, wurden die Ganglien extir-

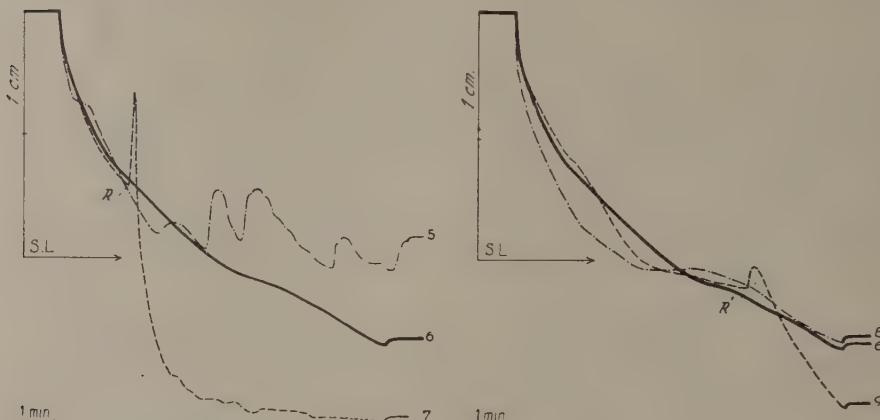


Abb. 2. Vergleichung von Konzerniveaus und durch mechanische Nervenreizung während Konzern erzeugte Tonuslösung; Wiederholungskurven 5 und 7 zeigen Pedalkonstanz, Kurven 8 und 9 Netzkonzern. Bei R wird einer der Nn. palliales durchschnitten und dadurch gereizt, bei R' einer der Nn. pedales. Niveaus nahe der Spannungslänge. Nummer 6 Vergleichskurven (ohne Konzern).

piert. Wiederholungskurve 8 zeigt dann Netzkonzern bei Spannungslänge, ebenso wie die nächstfolgende Kurve 9. Während der Netzkonzern wurde nun einer der Nn. pedales mit einer Pinzette gefasst und mit einer Schere durchschnitten. Eine ausgiebige Tonuslösung, welcher eine kleine Kontraktion vorangeht, wird durch diesen mechanischen Reiz verursacht.

4. Auslösung einer steilen Strecke durch Reizung von Pedalnerven.

In der dritten Mitteilung über die Ergebnisse der Tonusversuche am Schneckenfuss haben wir berichtet, dass auch nach Exstirpation der Pedalganglien Tonuslösung durch Reizung der Pedalnerven mit Einzelinduktionsschlägen während der Dehnung zu erhalten worden war (11, S. 1174). Ich bekam damals nur mässige und vorübergehende Vergrösserung (um $2\frac{1}{2}$ bis $7\frac{1}{2}$ °) des Neigungswinkels zwischen Dehnungskurve und X-Achse. Es gelang nicht, einen so beträchtlichen Fall der Kurve, wie er durch Reizung der Pedalganglien und nach Kontraktion, als Folge von Nervendurchschneidung erreicht wurde, auszulösen. Daher habe ich versucht durch technische Verbesserungen der Versuchsmethodik den Hemmungseffekt zu verstärken.

Weil offenbar in den Pedalnerven spezifisch hemmende neben erregenden Fasern laufen, von denen die letzteren die höhere Reizschwelle haben, versuchten wir für jeden Pedalnervenstrang die Hemmungsschwelle zu bestimmen und dann durch Summation von reinen Hemmungsreizen einen überzeugenden Effekt zu bekommen. Durch solche Summation wurde die Abänderung des Neigungswinkels tatsächlich grösser als bei Reizung eines der Stränge und sie dauerte länger; ein eigentlicher Fall der Kurve wurde aber nicht erreicht.

Auch faradische Reizung, welche während der gleitenden Kurvenstrecke bei der

Bestimmung der Hemmungsschwelle appliziert wurde, hatte nur eine geringe Vergrösserung des Neigungswinkels zur Folge. Nachdem alle diese Versuche scheiterten, überlegte ich, dass der Tonus, der Dehnungswiderstand also, schwerer angreifbar ist, wenn er „gefestigt“ ist. Ausserdem deuteten mehrere Versuchsergebnisse auf eine durch die Dehnung verursachte Tonuserzeugung, die den Tonusspiegel erhöhte. Ist dies der Fall, so macht sich während der gleitenden Kurvenstrecke die tonuserzeugende Funktion geltend und war Hemmung vielleicht deswegen schwer auszulösen. Es erschien daher aussichtsreicher, den Hemmungsreiz kurz vor der Belastung des Muskels zu applizieren. Tatsächlich gelang es mir dann, eine steile Anfangsstrecke der Dehnungskurve hervorzurufen, wie sie vom Fuss mit Pedalganglien schon lange bekannt ist. Bei diesen Reizungsversuchen wurden die folgenden Ergebnisse an Wiederholungskurven festgestellt:

a. Reizung von 1 min Dauer während der zweiten oder dritten Minute nach Dehnungsanfang zerstört den Tonusspiegel nicht mehr, noch ist sie imstande das Eintreten einer Netzkonstanz zu verhindern;

b. Reizung von 1 min Dauer, welche 40 sek vor Applikation der Belastung anfängt, ruft dahingegen eine ausgesprochene Tonusverminderung hervor; die Verlängerung des Fusses, welche ohne Reizung in 5 min erreicht worden wäre, erforderte infolge solch einer Reizung nur 2 min; der Neigungswinkel war in diesem Falle 47° , statt 16° ohne Hemmungsreiz;

c. Intermittierende Reizung verursacht nicht nur eine steile Anfangsstrecke, sondern kann zur Folge haben, dass das Niveau der Netzkonstanz überschritten wird, vorausgesetzt dass die erste Fraktion der Faradisierung vor der Belastung des Muskels angefangen hat.

C. Besprechung der Ergebnisse.

Wir haben nunmehr zu überlegen, durch welche Erscheinungen der ganglienlose Fuss sich von den nicht biologischen Modellen unterscheidet und durch welche er dem Fuss mit Ganglien, mit seiner ausgesprochener Dynamik, näher kommt (18, S. 1158). Wir wenden uns daher dem neuen Ergebnis über die Netzkonstanz zu, welche nach schneller Dehnung und dann beim Erreichen der Spannungslänge eintreten kann, d.h. bei der Länge des Fusses, wie er sie vor dem Dehnungsversuche bei der Präparation hatte (vergl. 18, S. 1155).

Ob der ganglienlose Fuss auch ohne regulierendes Eingreifen der Ganglien den Tonusspiegel erhöhen kann, was also durch primäre Tonuserzeugung geschehen müsste, können wir noch nicht eindeutig erschliessen. Bekanntlich zeigen auch visko-elastische Modelle und die Muskulatur der Seeanamone, der Schnecken u.s.w., während der Dehnung Widerstandserhöhung (Verfestigung nach ausgiebiger, und Schneepflugeffekt nach schneller Dehnung, 8). Es war uns früher nicht gelungen zu beweisen, dass die Erhöhung des Dehnungswiderstandes bei Helix und seine Verminderung während einer Dehnungspause etwas anders als Schneepflugeffekt und sein Abfluss sei (vergl. fraktionierte Dehnung, 14 u. 16). Demgegenüber verfügen wir jetzt über einige Ergebnisse mit Widerstandserhöhung und Hemmung dieser Steigerung, auch am Fusse ohne Ganglien, für die uns jedes Modell in der unbelebten Natur fehlt und welche daher auf einen nervenphysiologischen Prozess hinweisen:

a. Die Netzkonstanz mit ihrem Niveau bei Spannungslänge. Wenn wir vom gleichen visko-elastischen Material das Niveau des Schneepflugeffektes messen, zeigt sich, dass es durch die Dehnungsgeschwindigkeit (Belastungsgröße) bestimmt und daher nicht an eine gewisse Länge gebunden ist. Je schneller die anfängliche Dehnung verläuft, nach desto kürzerer Dehnungsstrecke wird das Gleichgewicht mit der Last eintreten und die Dehnung aufzuhören. Der Eintritt der Konstanz bei einer bestimmten, nämlich der Spannungslänge¹⁾.

1) Welche im Falle von JORDAN's Muskelkonstanz (Konstanz bei intakten Ganglien und geringerer Last) nach 6 min, dahingegen ohne Ganglien (Netzkonstanz) nach 30 min Dehnungsdauer erreicht worden ist.

findet also keine Erklärung durch Schneepflugeffekt, der niemals einer bestimmten Länge des Muskels entspricht.

b. *Vorhergehende Dehnung des Fusses hat einen entscheidenden Einfluss auf seine Reaktion auf verschiedenartige Eingriffe.*

1. Die tonische Verkürzung durch Temperaturwechsel (5, 7 u. 20) hat vorhergehende Dehnung *zur Voraussetzung*.

2. Ein Fuss von Aplysia wurde einem nicht eisgekühlten Tier entnommen, bei niedriger Temperatur auf dem Tonusapparat bewahrt und vor Ueberschreiten einer bestimmten „Zeitgrenze“, nach Vorkühlung von z.B. 30—35 min, belastet. Während der Dehnung wird nun die Zeitgrenze, die etwa bei 42—50 min nach dem Anfang der „Vorkühlung“ liegt, überschritten. Trotzdem tritt keine Verminderung des tonischen Widerstandes ein, was wohl geschehen wäre, wenn der Fuss erst *nach Ueberschreitung der „Zeitgrenze“* belastet worden wäre.

3. Ein Hemmungsreiz ist nur wenig wirksam, wenn er *während* der Dehnung die Fussnerven (ohne Ganglien) trifft, im Gegensatz zur Auslösung einer steilen Anfangsstrecke, bei Belastung des Muskels *nachdem* die Reizung schon angefangen hat.

c. *Die Umstimmung eines wenig tonischen Helixfusses in einen tonischen durch langdauernde Dehnung mit geringer Last* (vergl. 15 u. Mitt. V). Sie äussert sich durch Wiederholungskurven mit der ursprünglichen geringen Last, die wesentlich weniger steil sind als sie bei dem gleichen Fusse, ohne vorhergehende lange Dehnung mit niedriger Last waren.

Die Erklärung dieser Ergebnisse erfordert die Annahme, dass *Dehnung als Reflexreiz wirkt, welcher in der Peripherie den dynamischen Tonus hervorruft*. Diese Reaktion kann primär tonuserzeugend sein (tonische Verkürzung durch Temperaturveränderung und die Netzkonstanz bei Helix) oder (auch) regulierend, wie bei der beschriebenen Umstimmung und der Pseudowiederholungskurve; ferner tonische Verkürzung bei der durch Kälte ihres Tonus beraubten Aplysia, in übertriebenem Ausmaße nach Exstirpation der Ganglien. *Besonders die Erscheinung, dass vorhergehende Dehnung den Erfolg des Hemmungsreizes fast ganz unterdrückt, spricht dafür, dass die Dehnung als Reflexreiz tonuserzeugend wirkt.*

Das Studium des dynamischen, viskosoiden Tonus wurde durch JORDAN 1925 angeregt. Die muskelphysiologischen Erscheinungen am Helixfuss wurden von verschiedenen seiner Schülern bearbeitet (4, 16, 20). Aufklärung über die Rolle des Nervensystems bei den genannten Phänomenen erforderte noch neue Experimente. Diese ergänzenden Versuche haben wir als Mitarbeiter JORDANS nach unserer Demobilisation, begünstigt durch mehrere Umstände — u.a. durch finanzielle Unterstützung von Staats wegen, für welchen Beistand wir sehr erkenntlich sind — intensiever ausführen können, als sonst. Für das Interesse, das unser Lehrmeister auch durch Anteilnahme an den Versuchen (Mitt. III) und durch seinen Rat bei der Formulierung unserer Ansichten über die Bedeutung der Resultate zeigte, mögen wir ihm hier unseren aufrichtigen Dank aussprechen.

D. Zusammenfassung.

Die ältere Ergebnisse JORDAN's (*Aplysia*) und unsere Resultate der letzten Zeit (*Helix*) zusammenfassend, können wir sagen:

Die Peripherie (Fussmuskel und Nervennetz) ist imstande als Reaktion auf Dehnung (propriozeptiver Reflex) regulierend den Tonus zu erniedrigen und zu erhöhen, vielleicht auch, primär tonuserzeugend, den Spiegel zu erhöhen bis zur Netzkonstanz. Der während der Dehnung vom Helixfuss ohne Ganglien geleistete Widerstand hat daher neben einer statischen, auch eine dynamische Form, die gemeinschaftlich mit den Pedal-ganglien der Regulierung des Tonus dient, je nach Bedarf, z.B. wenn irgendwelche Einflüsse das Tonusgleichgewicht zu stören suchen. Alle diese Änderungen sind viel schwächer als beim Fuss in Verbindung mit den Ganglien.

Der Tonusspiegel ist während der Dehnung durch schwache Induktionsreize (Einzel-

schläge oder faradisch) nur wenig und vorübergehend zu erniedrigen. *Wird kurz vor der Belastung die faradische Reizung eingeschaltet, so gelingt es, eine steile Anfangsstrecke der Dehnungskurve auszulösen, wie sie beim pedaltonischen Fusse bekannt ist.* Vielleicht wird diese steile Anfangsstrecke nicht nur durch eine Erniedrigung des Tonuspiegels durch Hemmungsreiz hervorgerufen, sondern auch, infolge der Wirkung des gleichen Reizes, durch Hemmung einer — zur Folge von Dehnung — reaktiven Erhöhung des Spiegels verursacht. Auch die Netzkonstanz bei Spannungslänge ist durch passende Reizung der Nn. pedales zu vernichten: beim intakten Tiere kommen solche Impulse von den Zentren in den Ganglien.

LITERATUR.

1. JORDAN, H. J., Pflüg. Arch. **106**, 189 (1905); 2. JORDAN, H. J., Ibid. **110**, 533 (1905);
3. JORDAN, H. J., Ergebni. Physiol. **16**, 87 (1918); 4. JORDAN, H. J. und J. D. F. HARDENBERG, Zs. f. vergl. Physiol. **4**, 545 (1926); 5. JORDAN, H. J., Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **33**, 788 (1930); 6. JORDAN, H. J., Acta Brev. Néerl. **3**, 40 (1933); 7. JORDAN, H. J., Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **38**, 358 (1935) u. Symposium Beritoff S. 71 (1936); 8. JORDAN, H. J., Ibid. **39**, 796 (1936); 9. JORDAN, H. J., Ibid. **39**, 1040 (1936); 10. JORDAN, H. J., Ergebni. Physiol. **40**, 439 (1938); 11. JORDAN, H. J. u. N. POSTMA, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 1169 (1941); 12. MAAS, J. A., Arch. Néerl. Physiol. **13**, 1 (1938); 13. POSTMA, N., Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **36**, 360 (1933); 14. POSTMA, N., Ibid. **37**, 348 (1934); 15. POSTMA, N., Acta brev. Néerl. **4**, 106 (1934); 16. POSTMA, N., Onderzoeken betreffende het herstel van de tonus bij de slakkevoet (*Helix pomatia* L.) usw. Diss. Math. Naturw. Fac. Univ. Utrecht (1935); 17. POSTMA, N., Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **38**, 1036 (1935); 18. POSTMA, N., Ibid. **44**, 1151 (1941); 19. POSTMA, N., Ibid. **44**, 1239 (1941); 20. SWINDEREN, J. W. DE MAREES VAN, De regeling van den tonus in de spieren van *Helix pomatia*. Diss. Math. Naturw. Fac. Univ. Utrecht (1927).

Medicine. — *Anatomical and experimental investigations about the muscular system of the mammalian lung.* By C. VERSTEEGH (otolaryngologist) and C. DIJKSTRA (Physician f. lung diseases). (From the physiological Laboratory of the University, Utrecht, director the late Prof. A. K. M. NOYONS.) (Communicated by Prof. A. DE KLEYN.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

Before discussing the influence which could probably be exercised upon the lung by the involuntary muscle-cells, present in the bronchi and in the lung parenchym, it is desirable to give a short description of the anatomical arrangement and structure of these muscle-elements.

In anatomical literature it is usually stated that involuntary muscle-fibres are present in the whole bronchial system. The muscle-layer is situated under the bronchial mucous membrane, being separated from it by a rather thin layer of submucous connective tissue. The fasciculi proceed in a spiral-shaped way around the bronchial lumen; between these spiral-shaped muscle-rings some more or less oblique fasciculi are present connecting several rings of the spiral.

In this way a sort of wide-meshed network of fasciculi develops, enclosed by the cartilaginous rings, respectively cartilaginous plates in the larger and medium-sized bronchi. Also in the smaller and even in the smallest bronchi this muscular network extends.

In figure 1 (according to MILLER), a somewhat schematic picture, a distinct illustration of the above described structure of the bronchial musculature is given.

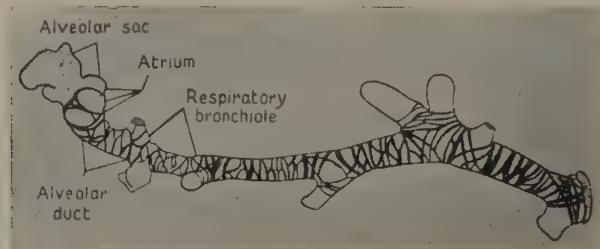


Fig. 1. Network of muscle-fibres of the bronchi. (According to MILLER.)

The muscle-net extends over the whole length of the bronchial system; it is also present in the terminal bronchiole. It goes without saying that the amount of muscle-fibres decreases peripherally, but from this it may not be concluded that these muscular elements in the peripheral region are of less importance than in the larger bronchi. This follows among other things from the thickness of the muscle layer with regard to the width of the lumen of the bronchus, resp. of the bronchiolus. It then appears that the thickness of this muscle layer in the smaller bronchi increases relatively with regard to the bronchial lumen.

In older literature it is repeatedly found that in the peripheral lung region no muscle-cells are present. From the investigations of BALTISBERGER and MACKLIN it appeared, however, that this view is wrong. It was found that here also the muscle-net is present. BALTISBERGER, by serial sections, came to the conclusion, that the muscle-cells in the

alveolar ducts enclose the orifices of the alveola and function as a kind of sphincter of the alveolar orifices (see fig. 2, according to BALTISBERGER).

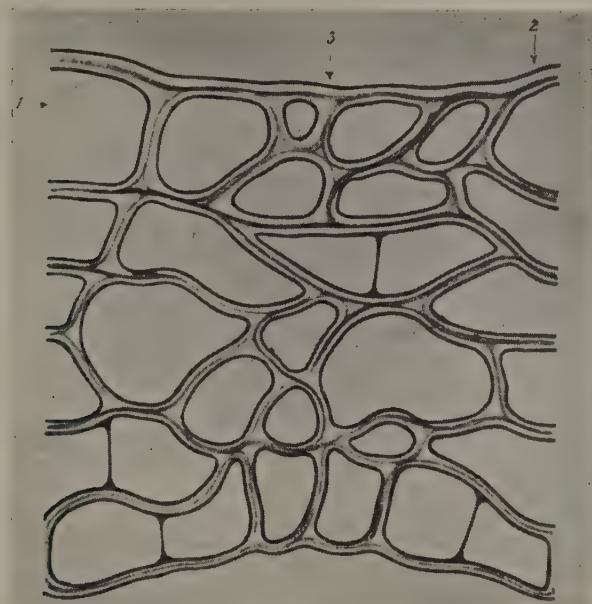


Fig. 2. Schematic drawing of the structure of the involuntary muscle-fibres in the alveolar ducts. (The alveolar duct is longitudinally cut and extended in the plane of the picture.) (According to BALTISBERGER.)

One should picture the alveolar duct to oneself as splitted longitudinally and spread out in the plane of the picture. All round this wall, that is to say on all sides, there are numerous, more or less oval or round openings, which are the alveolar orifices, giving entrance to the alveolar spaces. The parts of the alveolar wall situated between the alveolar orifices are for the greater part occupied by the involuntary fasciculi, which, together with the elastic connective fibres, form a broad network. From this network some fasciculi generally proceed, in a spiral-shaped way, upon the alveolus itself; generally, however, only extending over a small part of the alveolar wall. It is important to keep these special features well in mind as this typical arrangement of the muscular elements can give a better insight into their function and into the influence of the filling of the alveoli. The situation of the muscle-cells at the orifices of the alveoli can also be seen from the following picture, made after a microscopical preparation of a cat's lung. (See fig. 3.)

Here an alveolar duct was cut partly tangentially and partly transversally. In the lower part of the picture an alveolar duct is cut longitudinally. The alveoli arising from the alveolar duct are supplied on either side of the alveolar orifice with involuntary fasciculi. In the upper part of the picture, where the alveolar duct is cut transversally, these fasciculi are arranged around the lumen of the duct in a rosette-shaped way.

Besides the musculature of the bronchi and of the so-called "transition-region" (i.e. the bronchioli terminales and the alveolar ducts), there is another muscular system in the lung, consisting of rather irregularly spread muscle-layers which are situated both under the pleura visceralis and alongside of the blood- and lymphvessels, and in the connective tissue between the lobuli and the alveoli (the so-called alveolar septa).

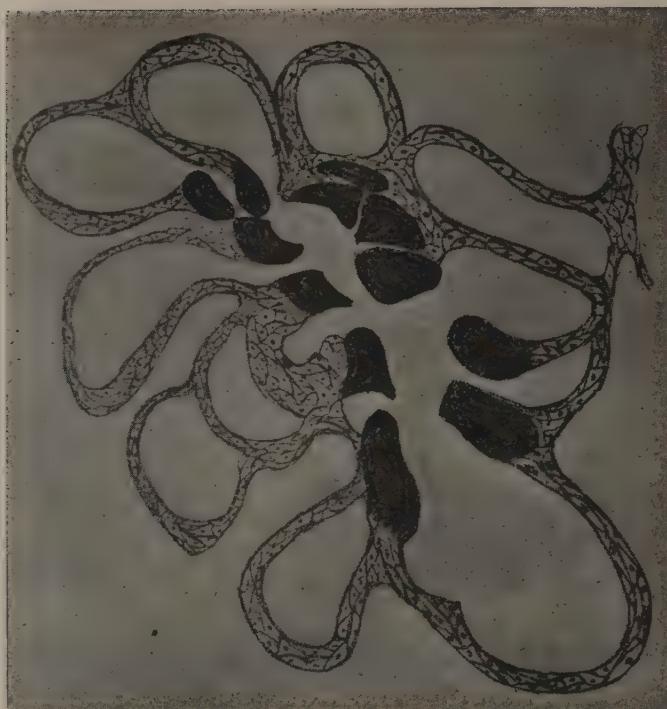


Fig. 3. Alveolar duct, tangentially cut in the lower part, transversally in the upper part. The structure of the involuntary muscle-fibres at the alveolar orifices can be clearly seen (alveolar sphincters).

This musculature was termed "interstitial lungmusculature" by BALTISBERGER (see fig. 4).

The situation of these muscle-cells can be less easily surveyed than that of the bronchial tree, because the muscle fibres are not present in the same way and degree throughout. It is therefore not certain if and to what extent this interstitial musculature has any influence upon the filling condition of the alveoli; it is, however, very probable that there *may* be some influence on account of the situation of the muscles between the alveoli.

It is rather difficult to obtain some further data about the function of this interstitial musculature in the mammalian lung as here also bronchial muscles are present and it is not possible to study the function of both systems separately. In the lower species of animals, i.e. in the reptiles and even more so in the amphibia (*Rana esculenta*) the function of the peripheral musculature, arranged around the respiratory space, can be studied without difficulties as here no bronchi are present.

The reactions of the involuntary lung musculature in amphibia were studied by CARLSON and LUCKHARDT (1921); DIJKSTRA; DIJKSTRA and NOYONS (1940). About the function of the lung musculature in mammals only little is known with certainty.

Many investigators could ascertain that the musculature of the larger bronchi can narrow the lumen of the bronchi (by contraction) or dilate it (by relaxation).

These observations are partly based on bronchoscopic and röntgenologic experiments. ELLIS could register the alterations in diameter of one of the larger bronchi by means of a handy apparatus. With this instrument ELLIS examined the influence of several pharmaca upon the bronchi. It appeared that adrenaline and atropine has a dilating, pilocarpine a narrowing influence.

ELLIS comes to the conclusion that all rhythmic alterations of the bronchial lumen are passive and caused by the respiration, the influence of the bronchial musculature being purely tonic. BINET and BURSTEIN could demonstrate, by means of registering the movements of an air stream in the trachea, that acetylcholine (respectively carbamylcholine) and histamine caused a narrowing of the bronchi.

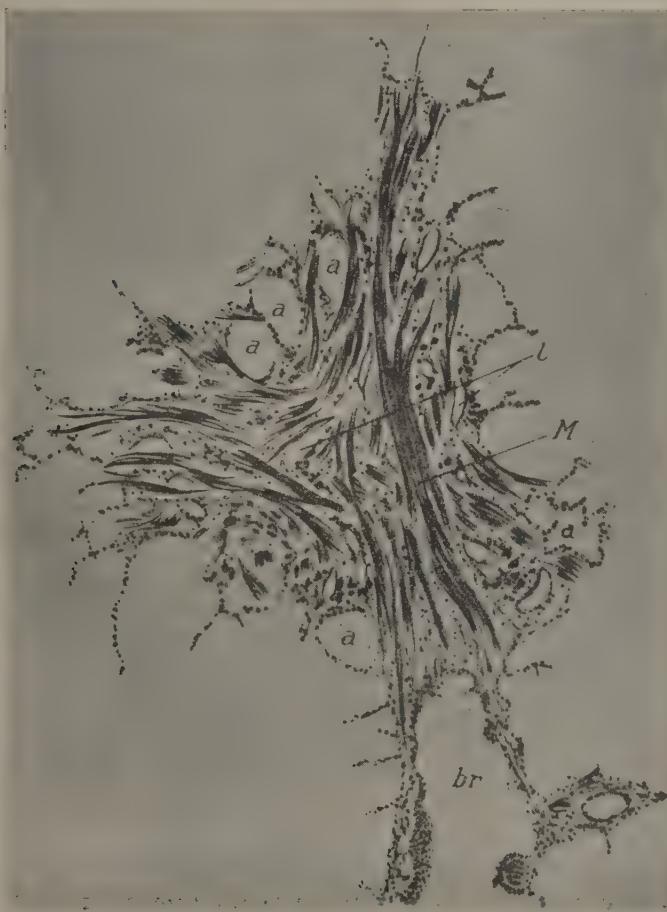


Fig. 4. Interstitial lung musculature. (According to BALTISBERGER.)

About the function of the peripheral musculature, i.e. the muscle-net of the bronchioli terminales and the interstitial muscle-cells, still less is known. MACKLIN thinks that the musculature of the alveolar ducts works as a sphincter of the alveolar orifices and so causes a more or less marked stricture of the entrance of the alveoli. VON NEERGAARD thinks that the interstitial muscle-cells exercise some influence upon the form of the alveolus. Of the muscles of the alveolar wall, which partly extend over the alveolar wall in a spiral-shaped way, it is also thought that they can exercise traction upon this wall. This causes a transformation which has, as he thinks, an important influence upon the tension at the surface of the alveolar wall, thus causing an alteration in the filling of the alveolus.

Also in some recent publications of clinicians (DUMAREST, BRONKHORST a.o.) the opinion is expressed that the peripheral lung musculature influences the filling of the

alveoli and the tension-condition of the lung tissue. Several pathological conditions and symptoms lead to this conception, e.g. the development of a selective collapse of the diseased part of a tuberculous lung in a pneumothorax; further the sudden augmentation of the lung collapse caused by a pleurisy in a pneumothorax, which existed a long time already.

Moreover BRONKHORST pointed to the possible influence of the lung musculature upon the behaviour of the caverns in the tuberculous lung. All these symptoms by which the lumen of the lung is altered in a relatively short space of time and the air-content of the lung is changed to a considerable extent give rise to the idea that in this organ elements are present which have an active influence upon the tension of the lung tissue. As a matter of fact we think here of the involuntary muscle-cells present in the lungs to such a great extent; we tried to confirm this supposition by means of experiments on animals.

Experimental observations about the activity of the peripheral lung musculature.

As appeared from the foregoing and taking clinical and experimental observations as a basis, it can be said that the involuntary lung musculature can exercise influence upon the lung volume under special circumstances. We intended to investigate whether in mammals contractions and relaxations of the musculature can occur, and if so, whether its influence upon the lung can be demonstrated. If it were possible to alter the volume of the lung by means of reactions of the involuntary lung musculature, one could deduce from this fact that in the above mentioned clinical conditions (selective collapse, massive collapse after thoracocautery and variations in the degree of the tuberculous lung-caverns) can develop under the influence of muscle activity in the lung itself.

Our attempts to approximate this question experimentally supplied us with some valuable data about the relations in the thorax; it is therefore desirable to give a review of the different investigations.

The first experiment consisted in measuring the intrapleural pressure in rabbits. The pressure in one of the pleural cavities was determined by means of a pneumothorax-needle and a manometer. After this the influence of pharmaca, a.o. of acetylcholine, upon the intrapleural pressure was investigated. We expected that a contraction of the involuntary lung musculature would occur after administration of acetylcholine and that the tension in the lung tissue would increase, thus causing a diminution of the lung and an increase of the negative pressure in the pleural cavity. From the changed relations in pressure in the pleural cavity the conclusion could then be drawn that in the lung (by contraction of the lung musculature) an increased tension had developed which caused the diminution of this organ.

It appeared from these experiments however, that at the same time the acetylcholine causes a changed respiratory volume by which the pressure in the pleural cavity is also influenced. Therefore it was impossible to conclude from the altered negative pressure in the pleural cavity if this was caused either by an increased muscle-tension in the lung or by a more marked dilatation of the thorax, due to a deepened respiration. We therefore tried to exclude the influence of the thoracic movements as much as possible by the following experiment.

In dogs¹⁾ a pneumothorax was made. We now tried to reduce the changes of the pressure in the pleural cavity caused by the respiratory movements, to the utmost minimum, in the following way.

By means of a canula *A* the pleural cavity was connected with two water valves *B* and *C* which were constructed in such a way that, when the negative pressure in the pleural cavity dropped during respiration under a certain level, air was sucked into the pleural cavity, via valve *B*; and when in expiration the pressure in the pleural cavity increased, air was pressed out via valve *C*. In this way it seemed possible to reduce the

¹⁾ It appeared that dogs were more suited for these experiments than rabbits, owing to their greater resistance.

variations in pressure developing in normal respiration in the pleural cavity, to a minimum. It was also supposed that, when by some manipulation the volume of the lung was altered, the changes in pressure thus caused in the pleural cavity would be levelled by the ventilation-system. Changes in the lung volume which might develop would be registered röntgenographically.

So we thought that in this way it might be possible to restrict the influence of the respiratory movements upon the thorax content to a minimum and to create a condition in which changes of the lung which might develop could manifest themselves freely.

To verify these conceptions a pneumothorax-needle was brought into the pleural cavity and connected with a manometer while the valves were active. It appeared now that in this manometer only very small oscillations, synchronic with the respiration, occurred. That in this experiment slight alterations of the state of the manometer developed, could be expected as the flowing-in of air through valve *B* does not occur before the increase of the negative pressure in the pleural cavity in inspiration has reached a certain degree, while in expiration the same holds good for the flowing-out of air. This is due to the fact that there is always a resistance in the valves.

The most obvious conclusion, that this oscillation of the manometer was a reliable standard for the variations of pressure in the pleural cavity appeared not to be correct, however. The result of these experiments is dependent on the width of the lumen of the pneumothorax-needle. If this lumen is considerably narrower than the canula which is connected with the valves, the passage through this needle will only be small owing to the larger resistance which the air meets in the thin needle. The air finds its way more easily through the wider canula.

When, instead of the pneumothorax needle, a wide canula was brought into the thorax, it appeared that, in spite of the activity of the valves, important changes in pressure in the thoracic cavity occurred during the respiration.

These variations in pressure remain present because the air that escapes, respectively flows in, meets too much resistance on its way through the valves. To exclude this resistance sufficiently it is necessary to make very large openings in the thorax.

It was due to the difficulties attending this intervention that we had to abandon this experiment. So, after it had appeared that this experiment could not be used for our purpose either, the following experiment was made, which supplied some results.

Experiment I (fig. 5).

As experimental animals we used cats¹⁾ which were anaesthetized with evipannatrium. A tracheotomy was done and a canula with two openings was inserted through the tracheal aperture. In one opening a long hollow, metal sonde that could be shoved in, was attached, which was pushed down to the bifurcation. Through this aperture oxygen²⁾ flew constantly into the lungs under slight overpressure.

The canula was attached in such a way that no oxygen could escape along the tracheal wall.

Now the thorax was opened in the middle, the thoracic walls were bent laterally which made the lungs completely free. The phrenic nerves were cut through near the diaphragm. These two interventions reduced the influence of the respiratory muscles upon the lungs by respiratory movements which were sometimes present to a minimum.

For the injection of pharmaca a venaecanula was inserted into the vena jugularis.

The animals operated upon in this way could be kept alive for several hours. Administration of warmth and moisture prevented the refrigeration of the animal and the drying

¹⁾ Economical reasons obliged us to use cats instead of dogs.

²⁾ Oxygen had to be used as the experimental animals died before long (probably by anoxaemia) when air was used.

of lungs and heart. Now both openings in the tracheal canula were connected with a tube system, as indicated in the figure.

The oxygen was administrated from a cylinder. The path of the oxygen-flow is drawn schematically with a dotted line with arrows.

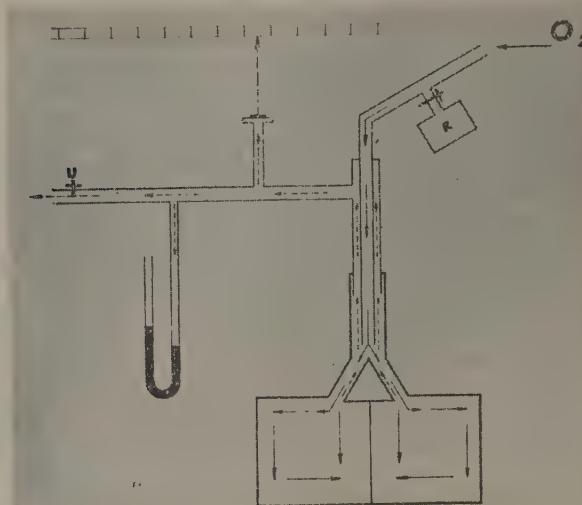


Fig. 5. Schematic drawing of experiment I. At $O_2 \rightarrow$ oxygen is inflated in the tracheal canula under slight overpressure. This constant oxygen stream leaves the lungs along the canula after having passed them. In the outlet-system a manometer (registering the overpressure in the system) and a MAREYSCH' tambour are constructed. The movements in the MAREYSCH' tambour are reproduced enlarged on a registration-lath by means of a mirror.

U = outlet-opening of the system.

R = tank in which O_2 is brought under $\frac{1}{4}$ atmosphere overpressure. This tank is separated from the rest of the system by a tap.

Through one opening in the tracheal canula the oxygen is brought to the bifurcation and after having flown through the lungs can leave them at the opening U (this opening can be enlarged or reduced).

In the descendent tube two branches are made of which one goes to the manometer which is filled with water and the other to an optic registration-apparatus which registers the changes in pressure of the system.

The importance of the tank U , separated from the system by a tap, will be discussed below.

The flow of oxygen is regulated in such a way that a slight constant overpressure is present (2-4 cm H_2O). If by some cause, e.g. by administration of acetylcholine the volume of the lungs is altered, a change in pressure will result. This change in pressure will however, be of only short duration as the system is not closed but connected with the open air at U . As soon as an increase in pressure occurs, more gas will temporarily escape through the opening U , thus soon bringing the pressure to the primary level. One can understand very well that the velocity of the development of the change in pressure has influence upon the results of the experiments. If the increase in pressure occurs too slowly, only a slight alteration in pressure will be registered as the oxygen has sufficient time to escape through the opening U .

To obtain results that one can register it is necessary to elicit marked, speedily developing, changes in pressure in the system. From the following two curves it can be seen that we could obtain some results in this way (fig. 6 and 7).

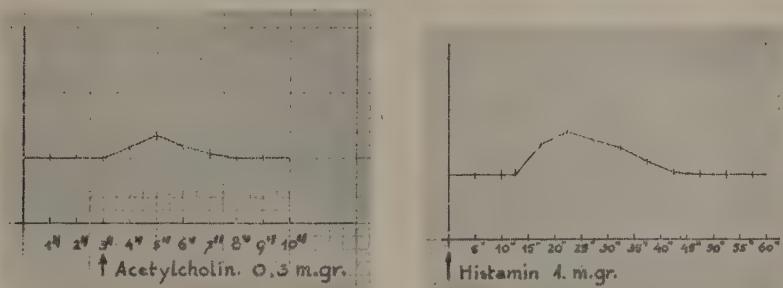


Fig. 6 and 7. Slight increase (of short duration) of the pressure in the so-called open system (see fig. 5). Under influence of acetylcholine (0,3 mgm) and histamin (1 mgm). At \uparrow injection.

From these curves it appears that both with acetylcholine and with histamin markedly increased pressures occur. After a short time, however, the pressure sinks to the original level owing to the above mentioned cause. In our opinion this increase in pressure, after administration of both mentioned pharmaca, must be explained by the fact that contraction of the lung musculature causes a diminution of the pulmonary volume. The increase in pressure can, however, also be caused by a stricture of the bronchial system, while a changed filling of the lung veins, respectively the presence of a lung oedema, can have a similar effect.

Medicine. — *Differentiation des protéines de poumon normal et de poumon intoxiqué par le phosgène au moyen de la réaction anaphylactique.* Par ONG SIAN GWAN.
(Communicated by Prof. E. GORTER.)

(Communicated at the meeting of June 27, 1942.)

1. Dans un mémoire antérieur on a vu qu'on pouvait immuniser des cobayes et des souris contre une dose sûrement mortelle de phosgène en les soumettant préalablement à des doses non mortelles de phosgène¹⁾. On peut expliquer ce résultat obtenu par la présence des protéines nouvelles, que nous avons mis en évidence par des méthodes physiques dans le poumon intoxiqué par le phosgène²⁾.

En utilisant une des réactions biologiques la plus spécifique, à savoir, le choc anaphylactique, nous pouvons maintenant montrer les différences entre les protéines de poumon normal et de poumon intoxiqué.

2. *Préparation de l'extrait pulmonaire.* Dans les expériences précédentes on a employé des poumons de porc frais qui furent ensuite traités par le phosgène. Il est clair que dans ce cas une partie de phosgène fut décomposée par le suc pulmonaire. L'action de phosgène sur les protéines pulmonaires serait ainsi moins active.

C'est pour cette raison que nous employons actuellement des poumons desséchés. L'avantage de ce poumon sec est qu'on peut le garder très longtemps et qu'on peut faire des expériences en série sur un même poumon.

La dessiccation du poumon a été effectuée sous vide ($p \sim 2$ mm Hg) à la température de 40° C (fig. 1).

Le procédé d'intoxication et la préparation de l'extrait pulmonaire ont été décrits

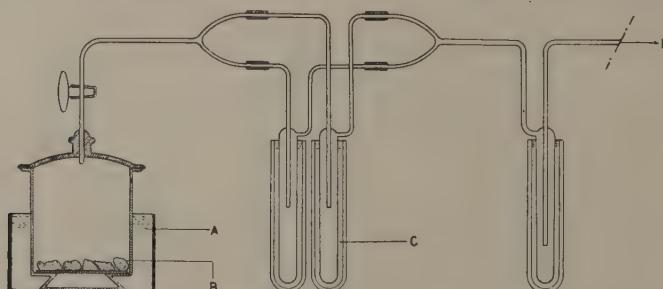


Fig. 1. Dispositif pour la dessiccation du poumon.

A, bain-marie à 40° C. B, poumon frais coupé en morceaux. C, air liquide, température -190° C. D, pompe rotative à huile.

dans un mémoire précédent²⁾. Pour augmenter la dissolution des protéines de poumon, le mélange poumon et eau salée à 0,9 p. 100 fut agité pendant deux heures à l'aide d'un agitateur mécanique, dont la fréquence était de 80 par minute.

3. *Anaphylaxie active.* Dans toutes les expériences les cobayes employés étaient élevés par nous-même, ils donnaient une sensibilité constante vis-à-vis du choc anaphylactique. Le poids des animaux ne dépassait pas 300 gr. en général.

1) ONG SIAN GWAN, Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **44**, 205 (1941).

2) ONG SIAN GWAN, Ibid., **44**, 871 et 1024 (1941).

Sensibilisation vis-à-vis de l'extrait de poumon intoxiqué par le phosgène. Dans ce groupe d'expériences les cobayes ont reçu une injection souscutanée (1 cc) d'un extrait de poumon de porc intoxiqué, correspondant à 1 mg de protéines. La quantité de protéines était déterminée par précipitation alcool-o-acétone selon la méthode de KAYSER. On faisait 34 jours après l'injection déchainante, soit par l'extrait de poumon intoxiqué, soit par l'extrait de poumon normal. Le tableau 1 montre le résultat obtenu. On constate,

TABLEAU 1.

Anaphylaxie active. Sensibilisation vis-à-vis de l'extrait de poumon intoxiqué de porc par injection souscutanée de 1 mg. de protéines.

N°, sexe et poids des cobayes	Injection d'épreuve, faite 34 j. après la sensibilisation	Résultats	2 ème injection d'épreuve, faite 24 h. après la première	Résultats
1, f, 320 gr. albinos	8,9 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	choc grave, presque mortel	12,5 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	rien, survie désensibilisé
2, f, 335 gr. albinos	13,3 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	choc mortel en 3 min. 9 sec.		
3, f, 385 gr. albinos	17,8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	choc mortel en 2 min. 40 sec.		
4, f, 300 gr. albinos	8,9 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. souscutanée	rien	17,8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	choc très léger, désensibilisé, survie
5, m, 385 gr. albinos	21,9 mg. de protéines de poumon normal de porc, inj. intraveineuse	choc léger, dû à l'extrait pulmonaire	17,8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	rien, désensibilisé, survie
6, f, 295 gr.	21,9 mg. de protéines de poumon normal de porc, inj. intraveineuse	rien	17,8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intracardiaque	choc moyen, désensibilisé, survie

Cobayes témoins, non sensibilisés.

7, m, 535 gr. albinos	8,9 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	choc léger, survie	17,8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	choc léger, survie
8, m, 500 gr. albinos	17,8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	choc léger, survie	17,8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	rien, survie
9, f, 480 gr. albinos	21,9 mg. de protéines de poumon normal de porc, inj. intraveineuse	rien, survie	17,8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, injection échouée	survie

toutes conditions égales, que l'injection intraveineuse d'extrait de poumon intoxiqué provoquait un choc anaphylactique très grave ou mortel, tandis que l'injection d'extrait de poumon normal ne donnait pas de symptômes d'anaphylaxie.

Le cobaye 1 qui a survécu le choc anaphylactique très grave supportait le lendemain

une dose mortelle du même extrait de poumon intoxiqué. Il fut désensibilisé. Le même résultat a été obtenu avec le cobaye 4, qui a reçu d'abord une injection souscutanée d'extrait de poumon intoxiqué et 24 h. après une dose sûrement mortelle du même extrait par voie intraveineuse.

Il est à remarquer que l'injection d'extrait de poumon normal ne donnait pas de choc anaphylactique, mais qu'elle était capable de désensibiliser le cobaye vis-à-vis d'une dose mortelle d'extrait de poumon intoxiqué (cobayes 5 et 6). On pourrait expliquer ce résultat de deux manières; dans le premier cas on pourrait penser qu'il s'agirait d'une désensibilisation spécifique. On devrait concevoir que seulement une petite partie de la molécule protéique est modifiée par l'intoxication phosgénique. Les molécules de protéines normales injectées se combineront avec les anticorps anaphylactiques, il en résulterait une désensibilisation vis-à-vis de la dose mortelle de protéines modifiées.

Dans le deuxième cas, on pourrait penser qu'il s'agirait d'une désensibilisation non spécifique. On sait depuis longtemps que l'extrait de poumon est toxique pour l'animal. De plus l'injection d'extrait pulmonaire donne des symptômes, qu'on observe également dans le choc anaphylactique: prurit, hoquet, émission d'urine et de matières fécales, respiration fréquente, convulsion et paralysie. Il est donc probable que le choc léger, que l'animal a eu après l'injection d'extrait de poumon normal désensibilisera l'animal contre une dose mortelle d'extrait de poumon intoxiqué.

C'est pour cela qu'on a déterminé la toxicité des extraits de poumons normal et intoxiqué chez des cobayes neufs (cobayes témoins). Si par conséquent un cobaye sensibilisé était tué par une dose de protéines inférieure à la dose mortelle pour un cobaye neuf, on peut en conclure qu'il s'agirait d'un choc anaphylactique.

4. *Sensibilisation vis-à-vis de l'extrait de poumon normal.* Dans le deuxième groupe d'expériences les cobayes ont reçu une injection souscutanée (1 cc) d'un extrait de poumon de porc normal, correspondant à 0,9 mg. de protéines. Trente jours après on faisait l'injection déchainante, soit par l'extrait de poumon normal, soit par l'extrait de poumon intoxiqué. Le tableau 2 montre que l'injection intraveineuse d'extrait de poumon

TABLEAU 2.

Anaphylaxie active. Sensibilisation vis-à-vis de l'extrait de poumon normal de porc par injection souscutanée de 0,9 mg. de protéines.

N°, sexe et poids des cobayes	Injection d'épreuve, faite 30 j. après la sensibilisation	Résultats	2 ème injection d'épreuve, faite 24 h. après la première	Résultats
1, f, 220 gr. albinos	5 mg. de protéines de poumon normal de porc, inj. intraveineuse	choc mortel en 2 min. 52 sec.		
2, m, 245 gr.	5 mg. de protéines de poumon normal de porc, inj. intraveineuse	choc mortel en 2 min. 40 sec.		
3, m, 220 gr. albinos	10 mg. de protéines de poumon normal de porc, inj. intraveineuse	choc mortel en 2 min. 26 sec.		
4, f, 240 gr.	5 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	choc léger, survie	5 mg. de protéines de poumon normal de porc, inj. intraveineuse	choc léger, désensibilisé, survie
5, m, 290 gr. albinos	5 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	choc léger, survie	5 mg. de protéines de poumon normal de porc, inj. intraveineuse	choc très léger, désensibilisé, survie
6, f, 240 gr. albinos	10 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	choc mortel en 5 min. 32 sec.		

normal, contenant 5 mg. de protéines était déjà mortelle pour l'animal sensibilisé, tandis que la même quantité d'extrait de poumon intoxiqué ne donnait qu'un choc anaphylactique léger. L'extrait de poumon intoxiqué ne tuait le cobaye qu'à la dose de 10 mg. de protéines. Il y avait donc une différence quantitative entre les extraits de poumons normal et intoxiqué. On constate de plus que l'injection d'extrait de poumon intoxiqué désensibilisait le cobaye vis-à-vis de l'extrait de poumon normal. Ce résultat correspond à celui obtenu dans la première expérience, où l'injection d'extrait de poumon normal vaccinait le cobaye sensibilisé vis-à-vis de l'extrait de poumon intoxiqué contre une dose mortelle d'extrait de poumon intoxiqué. On pourrait ici également expliquer comme nous venons de faire plus haut.

5. *Sensibilisation vis-à-vis de l'extrait de poumon de porc intoxiqué. Injection déchainante par l'extrait de poumon de vache normal ou intoxiqué.* Les résultats précédents montrent qu'on peut distinguer les protéines de poumon normal de celles de poumon intoxiqué au moyen du choc anaphylactique. On pourrait se demander, s'il ne se formerait pas un groupement spécifique dans la molécule de protéine après l'action du phosgène. Dans ce cas on devrait obtenir le même résultat en injectant chez un cobaye sensibilisé vis-à-vis du poumon de porc intoxiqué, soit l'extrait de poumon intoxiqué correspondant, soit l'extrait de poumon intoxiqué d'un autre espèce.

A cet effet six cobayes ont été sensibilisés par une injection souscutanée (1 cc) d'extrait de poumon de porc intoxiqué, correspondant à 1 mg. de protéines. Trente trois jours après on faisait l'injection déchainante, soit par l'extrait de poumon intoxiqué de vache, soit par l'extrait de poumon normal de vache. En même temps on injectait également l'extrait de poumon de porc correspondant pour savoir si la sensibilisation a eu lieu. Les cobayes 1 et 2 ainsi éprouvés par injection intraveineuse d'extrait de poumon intoxiqué de porc montrait le premier un choc anaphylactique moyen, parcequ'une partie du liquide injecté restait sous la peau et le deuxième un choc anaphylactique mortel (tableau 3). Comparons les cobayes 3 et 4 avec les cobayes 5 et 6. Les deux premiers

TABLEAU 3.

Anaphylaxie active. Sensibilisation vis-à-vis de l'extrait de poumon intoxiqué de porc par injection souscutanée de 1 mg. de protéines.

N°, sexe et poids des cobayes	Injection d'épreuve, faite 33 j. après la sensibilisation	Résultats	2 ème injection d'épreuve, faite 24 h. après la première	Résultats
1, f, 193 gr.	10 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse et souscutanée	choc moyen, survie	20 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	rien, survie
2, m, 410 gr. albinos	11,6 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	choc suraigu mortel		
3, m, 240 gr.	10 mg. de protéines de poumon intoxiqué de vache, inj. intraveineuse	choc mortel en 4 min. 2 sec.		
4, f, 310 gr.	20 mg. de protéines de poumon intoxiqué de vache, inj. intraveineuse	choc mortel en 1 min. 15 sec.		
5, m, 340 gr.	5,2 mg. de protéines de poumon normal de vache, inj. intraveineuse	rien, survie	20 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	choc très grave, presque mortel
6, m, 235 gr.	10,4 mg. de protéines de poumon normal de vache, inj. intraveineuse	choc mortel en 6 min. 4 sec.		

Cobayes témoins, non sensibilisés.

7, m, 440 gr. albinos	10 mg. de protéines de poumon intoxiqué de vache, inj. intraveineuse	choc léger, survie	
8, f, 372 gr.	20 mg. de protéines de poumon intoxiqué de vache, inj. intraveineuse	choc mortel en 2 min. 57 sec.	
9, m, 400 gr. albinos	10,4 mg. de protéines de poumon normal de vache, inj. intraveineuse	choc léger, survie	
10, m, 273 gr. albinos	20,8 mg. de protéines de poumon normal de vache, inj. intraveineuse	choc prolongé mortel en 10 min. 32 sec.	

ont reçu 10 et 20 mg. de protéines de poumon intoxiqué de vache, tous sont morts d'un choc anaphylactique. Les deux derniers ont reçu 5,2 et 10,4 mg. de protéines de poumon normal de vache; le cobaye 5 a survécu, tandis que le cobaye 6 a succombé. Ce résultat montre qu'il n'y a pas de différence entre les protéines de poumons normal et intoxiqué de vache. En effet, les deux protéines tuaient le cobaye à la dose de 10 mg. Mais on peut en conclure, que les protéines normales aussi bien que les protéines intoxiquées de poumon de vache donnaient un choc anaphylactique mortel chez des cobayes sensibilisés vis-à-vis du poumon intoxiqué de porc. Cette conclusion est exacte, puisque les cobayes neufs (cobayes témoins 7 et 9) supportaient la même quantité de protéines normales ou modifiées. Il s'agissait probablement d'une anaphylaxie spécifique pour les organes.

Comparons ensuite le cobaye 1 avec le cobaye 5. Le premier a reçu une injection d'extrait de poumon intoxiqué de porc, il était complètement désensibilisé vis-à-vis du même extrait. Le cobaye 5 par contre a reçu d'abord l'extrait de poumon normal de vache et a ensuite été injecté par l'extrait de poumon intoxiqué de porc. Il était très peu ou pas désensibilisé vis-à-vis de cet extrait, puisque le choc était très grave et presque mortel. Les protéines du poumon intoxiqué de porc ont donc une action désensibilisante plus prononcée que celles du poumon normal de vache.

Il faut remarquer que l'extrait de poumon de vache était plus toxique que celui de poumon de porc. On peut le voir en comparant les cobayes témoins dans les tableaux 1 et 3.

6. *Anaphylaxie passive.* A l'aide de l'anaphylaxie passive on peut maintenant montrer qu'il existe un groupement moléculaire identique, dû à l'intoxication phosgénique, dans la molécule de protéines de différentes espèces.

La sensibilisation passive a été réalisée par injection souscutanée (4 cc) ou intrapéritonéale d'un sérum de lapin préparé par plusieurs injections intraveineuses d'extrait de poumon intoxiqué de porc. Le lendemain les animaux furent éprouvés par injection intraveineuse d'extrait de poumon normal ou intoxiqué. Le tableau 4 montre qu'on peut ainsi obtenir une anaphylaxie passive vis-à-vis de l'extrait de poumon correspondant (cobayes 1 et 2). En comparant les résultats obtenus chez les cobayes 3 et 4 avec ceux obtenus chez les cobayes 5 et 6 on constate une différence nette. Tandis que les cobayes 3 et 4 supportaient respectivement 5 et 10 mg. de protéines de poumon normal de vache, les cobayes 5 et 6 par contre ont eu le premier un choc anaphylactique grave et presque mortel et l'autre un choc anaphylactique mortel après l'injection de 5 et de 8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de vache. Remarquons que la dose de protéines injectées n'était pas mortelle pour un cobaye neuf (tableau 3, cobayes témoins 7 et 9). Il est clair qu'il existe une différence nette entre les protéines de poumon normal et celles de poumon intoxiqué de vache chez le cobaye sensibilisé vis-à-vis des protéines de poumon

TABLEAU 4.

Anaphylaxie passive. Sensibilisation vis-à-vis de l'extrait de poumon intoxiqué de porc par injection souscutanée de 4 cc de sérum de lapin immunisé contre le poumon intoxiqué *).

N°, sexe et poids des cobayes	Injection d'épreuve, faite 24 h. après la sensibilisation	Résultats	2 ème injection d'épreuve, faite 24 h. après la première	Résultats
1, f, 210 gr. albinos	15 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	choc presque mortel	8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de vache, inj. intrapéritonéale	rien, survie
2, f, 200 gr. albinos	15 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intraveineuse	choc mortel en 2 min. 16 sec.		
3, f, 215 gr.	5 mg. de protéines de poumon normal de vache, inj. intraveineuse	choc très léger, survie	15 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. intracardiaque	choc prolongé, mort en 22 min. 3 sec.
4, f, 240 gr.	10 mg. de protéines de poumon normal de vache, inj. intraveineuse	choc très léger, survie	8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de vache, inj. intraveineuse	choc prolongé avec paralysie, survie
5, f, 210 gr. albinos	5 mg. de protéines de poumon intoxiqué de vache, inj. intraveineuse	choc aigu presque mortel	15 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc	choc aigu, mort en 2 min. 37 sec.
6, f, 255 gr. albinos	8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de vache, inj. intraveineuse	choc suraigu, mort en 2 min. 2 sec.		
7, m, 305 gr. albinos	17,8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. souscutanée	rien	8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de vache, inj. intraveineuse	choc moyen, survie
8, f, 290 gr. albinos	17,8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de porc, inj. souscutanée	rien	8 mg. de protéines de poumon intoxiqué de vache, inj. intraveineuse	choc grave, survie

intoxiqué de porc. Il existe donc un groupement moléculaire identique dans les protéines de poumon intoxiqué de porc et de vache.

Si maintenant on recherche la désensibilisation, on constate que les cobayes 1, 7 et 8, qui ont reçu l'extrait de poumon intoxiqué de porc, pouvaient supporter une dose mortelle d'extrait de poumon intoxiqué de vache, tandis que les cobayes 3 et 4, qui ont reçu l'extrait de poumon normal de porc, ne supportaient pas l'extrait de poumon intoxiqué de porc ou de vache. Le même résultat a déjà été obtenu par le cobaye 5 dans le tableau 3. Chez le cobaye 4, la deuxième injection d'épreuve a été faite 29 j. après la première. Le résultat devrait être plus net si l'on faisait la deuxième injection d'épreuve peu après la première, parce qu'on sait que l'anaphylaxie passive est passagère. On voit que le cobaye 5 qui a reçu l'extrait de poumon intoxiqué de vache n'était pas désensibilisé vis-à-vis de l'extrait de poumon intoxiqué de porc. On pourrait l'expliquer comme suit: les protéines de poumon intoxiqué de vache pourront seulement saturer une

*) Le cobaye 1 a été sensibilisé par injection intrapéritonéale de 2 cc de sérum et la deuxième injection d'épreuve, en même temps avec le cobaye 4, a été réalisée 29 j. après la première.

petite partie d'anticorps anaphylactiques par leur groupement moléculaire identique, formé par l'action de phosgène. La plus grande partie d'anticorps anaphylactiques resteront cependant libres et l'injection de protéines correspondantes provoquerait un choc anaphylactique mortel.

On pourrait également expliquer les faits obtenus en supposant que l'extrait de poumon intoxiqué se composait d'un mélange de protéines normales et de protéines modifiées. Les protéines normales se combineront seulement avec les anticorps provoqués par ces protéines, de même les protéines modifiées avec les anticorps correspondants. Cependant une partie des expériences rapportées n'est pas en faveur de cette hypothèse.

Les résultats obtenus ci-dessus se rapprochent beaucoup de ceux obtenus par des méthodes physiques²⁾. En effet, les mesures de l'indice de réfraction, du pouvoir rotatoire et les spectres d'absorption de protéines du poumon normal ou intoxiqué montrent qu'il existe une différence nette entre ces deux protéines. Ils montrent de plus que la différence devrait être causée par une modification chimique superficielle de la molécule de protéine. C'est ce que nous pouvons confirmer en nous servant de la réaction anaphylactique.

Ce travail a été poursuivie au Laboratoire KAMERLINGH ONNES et à l'Instituut voor Praeventieve Geneeskunde (Directeur J. P. BIJL) à Leyde.

Résumé.

1. Au moyen de la réaction anaphylactique on peut montrer une différence nette entre les protéines de poumon normal et celles de poumon intoxiqué par le phosgène de la même espèce animale.
2. Les protéines de poumon intoxiqué de différentes espèces ont un groupement moléculaire identique, formé par l'action de phosgène.
3. Ce groupement moléculaire identique doit être rattaché à une petite partie de la molécule protéique.
4. Il existe probablement une anaphylaxie spécifique pour le poumon.